Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no lineal vía el teorema de Schauder

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Elfren CHÁVEZ MACHADO

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2017

Referencia bibliográfica

Chávez, E. (2017). *Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no lineal vía el teorema de Schauder*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

1478.

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 12:30 horas del día viernes 12 de agosto del dos mil diecisiete, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro e integrado por los siguientes miembros, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (Jurado Evaluador), Dra. María Natividad Zegarra Garay (Jurado Evaluador), Mg. Adrián Guillermo Aliaga Llanos (Jurado Informante) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES DE UN SISTEMA ELÍPTICO NO LINEAL VÍA EL TEOREMA DE SCHAUDER» presentada por el Bachiller Elfren Chávez Machado para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

6(P)
76.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Elfren Chávez Machado respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Elfren Chávez Machado aprobado con el calificativo de ..18...... ...muy bueno.................

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Elfren Chávez Machado.

Siendo las 13:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Presidente

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro

Mg. Adrián Guillermo Aliaga Llanos
Miembro

Dra. María Natividad Zegarra Garay
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

Existencia de Soluciones Débiles de un Sistema Elíptico no lineal vía el Teorema de Schauder

Por

Elfren Chávez Machado

Tesis presentada a consideración del cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos , como parte de los requisitos para obtener el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Aprobada por el jurado:

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Presidente

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

Miembro

Mg. Adrián Guillermo Aliaga Llanos

Miembro

Dra. María Natividad Zegarra Garay

Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Asesor

En memoria de mis padres Leocadia y Augusto

Agradecimientos

Al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por sus valiosas sugerencias y comentarios que fueron muy importantes en el desarrollo de este trabajo.
A mi familia por su comprensión y estimulo continuo.
A mis amigos por el constante apoyo .

Resumen

En el capítulo 2 estudiaremos la existencia de solución débil para el siguiente problema elíptico no lineal

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

y en el capítulo 3 estudiaremos la existencia y unicidad de solución débil para el problema anisotrópico del siguiente tipo

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}(a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u) + b(x,u) = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Para resolver (1) usaremos la teoría de las funciones semicontinuas , aplicaremos el teorema de Lax - Milgram y el teorema del punto fijo de Schauder. Para resolver (2) aplicaremos el teorema de Minty-Browder y el teorema del punto fijo de Schauder.

Palabras Claves: Función semicontinua , solución débil , ecuación anisotrópica , teorema de Browder-Minty , teorema del punto fijo de Schauder.

Summary

In chapter 2 we will study the existence of a weak solution for the following non linear problem

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\quad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

and chapter 3 we will study the existence and uniqueness of the weak solution for the anisotropic problem of the following type

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}(a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u) + b(x,u) = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

To solve (1) we will use the theory of semicontinuos functions , we will apply the Lax-Milgram theorem and the Schauder fixed point theorem. To solve (2) we will apply Browder-Minty theorem and Schaudr fixed point theorem .

Key words: Semicontinuos function , weak solution , anisotropic equations , Browder-Minty theorem , Schauder fixed point theorem.

Índice general

Introducción

Los teoremas del punto fijo constituyen una importante herramienta para probar existencia de soluciones para ecuaciones, en el presente trabajo aplicaremos el teorema del punto fijo de Schauder (1930) que se puede considerar como una generalización del teorema de Brouwer (1912) a dimensiones infinitas es el resultado fundamental que utilizaremos para resolver el problema de existencia de solución débil para los problemas no lineales

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}(a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u) + b(x,u) = f \quad \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

En el capítulo 1 recordamos algunos resultados que son importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos, como son los resultados sobre funciones semicontinuas, el teorema generalizado de Weiersstras y el teorema del punto fijo de Schauder. En el capítulol 2 seguimos las ideas de [8], [9],[29] y [30], para demostrar la existencia de solución débil de (1) , inicialmente resolvemos (1) para $f \in L^{2_*}(\Omega)$, y $v \in L^2(\Omega)$ fijo con lo cual el problema se vuelve lineal y por el teorema de Lax - Milgram obtenemos la existencia de solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$, esto permite definir la aplicación

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$v \longrightarrow S(v) = u$$

probamos que S es continuo y compacto, además verificamos todas las condiciones requeridas y aplicamos el teorema del punto fijo de Schauder(1.18) con cual probamos la existencia de solucion débil para (1). En el capítulo 3 para probar la existencia de solución débil para (2) nos basamos en [25],[26],[27] y [28] , inicialmente definimos el espacio de Sobolev Anisotrópico, luego de considerar algunas hipótesis previas , procedemos a probar el teorema central de este capitulo , fijando la función $v \in L^{p_n}(\Omega)$ definimos el operador $T : W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)$. Probamos que T es compacto, continua, y coerciva entonces por el teorema de Browder-Minty [4], existe una solución débil u de la ecuación $Au = f$. Esto permite definir

$$\begin{aligned} \Phi : L^{p_n}(\Omega) &\longrightarrow L^{p_n}(\Omega) \\ v &\longrightarrow \Phi(v) = u \end{aligned}$$

probamos que Φ es monotóna, continua y además verificamos las condiciones necesarias y aplicamos el teorema del punto fijo de Schauder(1.18) por lo cual existe solución débil del problema (2). En el Capítulo 4, asumiendo algunas condiciones adicionales probamos la unicidad de la solucion débil para el problema (2)

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunos conceptos y resultados que seran de mucha utilidad para el desarrollo de los capitulos 2 y 3. El contenido de esta sección está basado en [2],[4],[6],[10] y [12].

1.1. Función Semicontinua Inferior

Antes de dar la definición formal recordemos que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in B(x_0, \delta) \longrightarrow |f(x) - f(x_0| < \epsilon$$

es decir , una función f es continua en x_0 si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / f(x_0) - \epsilon < f(x) \quad \text{y} \quad f(x) < f(x_0) + \epsilon, \forall x \in B(x_0, \delta),$$

esto es

$$B(x_0, \delta) \subset [f > f(x_0) - \epsilon] \cap [f < f(x_0) + \epsilon]$$

donde $[f > \lambda] = \{x \in \mathbb{R} / f(x) > \lambda\}$.
Esto motiva a definir que una función f es semicontinua inferior en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / f(x_0) - \epsilon < f(x), \forall x \in B(x_0, \delta)$$

o en forma equivalente f es semicontinua inferior en x_0, si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset [f > f(x_0) - \epsilon]$$

En general podemos definir la semicontinuidad inferior como sigue

Definición 1.1. *(Función Semicontinua Inferior)*
Sea (X,τ) un espacio topológico y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con $u_0 \in X$, diremos que J es semicontinua inferior en u_0 si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V(u_0)/J(u_0) - \epsilon < J(u), \forall u \in V(u_0)$$

Definición 1.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función , J es semicontinua inferior en X, si es semicontinua inferior en cada $u_0 \in X$*

Observación: Una función $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es semicontinua inferior en $u_0 \in X$ si para todo $r < J(u_0)$ existe una vecindad $V(u_0)$ tal que $u \in V$ implica $r < J(u)$.

Definición 1.3. *Sea (X,d) un espacio métrico , $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $u_0 \in X$, el límite inferior de J cuando u tiende a u_0 denotado por $\liminf\limits_{u \to u_0} J(u)$ se define como*

$$\liminf_{u \to u_0} J(u) = \sup_{\delta > 0} \inf_{u \in B(u_0,\delta)} J(u)$$

Nota: Un Espacio Métrico es un par (X,d) en el que X es un conjunto no vacio y d es una métrica sobre X

Teorema 1.1. *Sea (X,d) un espacio métrico , $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un función y $u_0 \in X$, entonces son equivalentes*

(a) *J es semicontinua inferior en u_0*

(b) $J(u_0) \leq \liminf\limits_{u \to u_0} J(u)$

Demostración. (a)$\longrightarrow$ (b)
Como J es semicontinua inferior en u_0 por definición tenemos $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ tal que

$$J(u_0) - \epsilon < J(u), \forall u \in B(u_0, \delta_\epsilon)$$

de aquí

$$J(u_0) < \epsilon + J(u), \forall u \in B(u_0, \delta_\epsilon)$$

tomando ínfimo en $B(u_0, \delta_\epsilon)$

$$J(u_0) \leqslant \epsilon + \inf_{u \in B(u_0,\delta_\epsilon)} J(u)$$

ahora tomamos supremo según $\delta_\epsilon > 0$

$$J(u_0) \leqslant \epsilon + \sup_{\delta_\epsilon > 0} \inf_{u \in B(u_0,\delta_\epsilon)} J(u)$$

como es válido $\forall \epsilon > 0$, obtenemos

$$J(u_0) \leqslant \liminf_{u \to u_0} J(u)$$

(b)$\longrightarrow$ (a)

Supongamos que J no es semicontinua inferior en u_0, entonces de la definición se tiene que $\exists \epsilon_0 > 0 / \forall r > 0, \exists u_r \in B(u_0, r)$ tal que

$$J(u_0) \geqslant \epsilon_0 + J(u_r)$$

entonces

$$J(u_0) - \epsilon_0 \geqslant J(u_r) \geqslant \inf_{u \in B(u_0,r)} J(u)$$

Tomando supremo según r positivo

$$J(u_0) - \epsilon_0 \geqslant \sup_{r>0} \inf_{u \in B(u_0,r)} J(u) = \liminf_{u \to u_0} J(u)$$

Además por hipótesis se tiene que

$$\liminf_{u \to u_0} J(u) \geq J(u_0)$$

Luego combinando estas desigualdades , obtenemos

$$J(u_0) - \epsilon_0 \geqslant J(u_0)$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto J es semicontinua inferior. $\square$

Teorema 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un función , son equivalentes*

(a) J *es semicontinua inferior*

(b) $J^{-1}(]-\infty, \lambda])$ *es cerrado* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $J^{-1}(]\lambda, +\infty[)$ *es abierto* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Demostración. (a)$\longrightarrow$ (b)

Supongamos que J es semicontinua inferior en X y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, para probar que

$$E_\lambda = J^{-1}(]-\infty, \lambda])$$

es cerrado, consideramos una sucesión $(u_n) \subset E_\lambda$ que converge a un punto u_0 en X , debemos probar que u_0 pertenece a E_λ o en forma equivalente que $J(u_0) \leq \lambda$. En efecto como J es semicontinua inferior en u_0 y $u_n \longrightarrow u_0$, por Teorema (1.1) obtenemos en particula para u_n que

$$J(u_0) \leq \liminf_{u_n \to u_0} J(u_n)$$

y ya que

$$J(u_n) \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$$

obtenemos

$$J(u_0) \leq \lambda$$

Es decir $u_0 \in E_\lambda$.

(b)$\longrightarrow$ (a)

Supongamos ahora que E_λ es cerrado cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$ .Consideremos $u_0 \in X$ y una sucesión (u_n) que converge a u_0 , sea $L = \liminf_{n \to +\infty} J(u_n)$, por definición de límite inferior existe una subsucesión (u_{n_k}) de (u_n), tal que $\liminf_{n \to +\infty} J(u_{n_k}) = L$. Por lo tanto $\forall \epsilon > 0$, existira k_0 tal que $J(u_{n_k}) \leq L + \epsilon, \forall k \geq k_0$ lo que significa que u_{n_k} pertenece a $E_{L+\epsilon}, \forall k \geq k_0$ teniendo en cuenta que (u_{n_k}) converge a u_0 y que $E_{L+\epsilon}$ es cerrado se tiene entonces que u_0 pertenece a $E_{L+\epsilon}$, es decir tenemos que $J(u_0) \leq L + \epsilon, \forall \epsilon > 0$ y en consecuencia $J(u_0) \leq L$.

(b)$\longleftrightarrow$ (c) es inmediato $\square$

Teorema 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico , $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $u_0 \in X$, entonces son equivalentes*

(a) J es semicontinua inferior en u_0

(b) J es secuencialmente semicontinua inferior en u_0 es decir

$$u_n \longrightarrow u_0 \Longrightarrow J(u_0) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n)$$

Demostración. (a)$\longrightarrow$ (b)

Por hipótesis tenemos que J es semicontinua inferior y $u_n \longrightarrow u_0$, entonces si $\lambda < J(u_0)$ por teorema (1.2) $J^{-1}(]\lambda, \infty[)$ es abierto. Puesto que $u_0 \in J^{-1}(]\lambda, \infty[)$ y $u_n \longrightarrow u_0$ existe N_λ tal que si $n > N_\lambda$ entonces $u_n \in J^{-1}(]\lambda, \infty[)$ es decir tenemos que $\lambda < J(u_n)$ de donde obtenemos $\liminf_{n\to\infty} J(u_n) > \lambda$ lo cual es válido para todo $\lambda < J(u_0)$, Por lo tanto

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$$

(b)$\longrightarrow$ (a)

Tenemos como hipótesis que $u_n \longrightarrow u_0$ y que $J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$U = J^{-1}(]-\infty, \lambda])$$

Si $u_0 \in \overline{U}$ existe una sucesión $(u_n) \in U$ tal que $u_n \longrightarrow u_0$ y como $J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n)$ entonces por la definición de U tenemos $J(u_n) \leq \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo cual tenemos $J(u_0) \leq \lambda$, esto significa que $u_0 \in U$ y entonces $\overline{U} = U$ por teorema (1.2) J es semicontinua inferior $\square$

1.2. Teorema de Weiersstras Generalizado

Teorema 1.4. ***(Teorema de Weiersstras Generalizado)*** *Sea (X, τ) un espacio topológico compacto y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un función semicontinua inferior, entonces J es acotado inferiormente y existe $u_0 \in X$ tal que $J(u_0) = \inf_{u\in X} J(u)$*

Demostración. :

(1) Veamos que

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} J^{-1}(]-n, +\infty[)$$

($\subset$) Si $u \in X$ se tiene que $J(u) \in \mathbb{R}$ entonces $-J(u) \in \mathbb{R}$ y por propiedad de los numeros naturales existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-J(u) < n \longrightarrow J(u) > -n$, luego $u \in J^{-1}(]-n, +\infty[)$ y por lo tanto

$$X \subset \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} J^{-1}(]-n, +\infty[)$$

($\supset$) También si $u \in \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} J^{-1}(]-n,+\infty[)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$u \in J^{-1}(]-k,+\infty[)$$

y como $u \in J^{-1}(]-k,+\infty[) \subset X$, se tiene

$$u \in \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} J^{-1}(]-n,+\infty[) \subset X$$

por lo tanto de ambos contenidos obtenemos

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} J^{-1}(]-n,+\infty[)$$

(2) Desde que $I_n =]-n,+\infty[$ es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$ y además ya que J es semicontinua inferior, por teorema (1.2) $J^{-1}(]-n,+\infty[)$ es abierto para todo n , luego $\{J^{-1}(]-n,+\infty[)\}_{n\geqslant 1}$ es un cubrimiento abierto de X y por ser X compacto existen $n_1, n_2, n_3, ..., n_k \in \mathbb{N}$ de modo que

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{k} J^{-1}(]-n_i,+\infty[)$$

sea $n_0 = max\{n_i/1 \leqslant i \leqslant k\}$ entonces $n_0 \geqslant n_i, \forall i = 1,2,3...,k$ por lo cual , si

$$u \in X \longrightarrow u \in J^{-1}(]-n_i,+\infty[)$$

para algún $1 \leqslant i \leqslant k$ se cumple $-n_i < J(u)$ entonces $-n_0 < J(u)$ esto significa que J es acotado inferiormente.

(3) Supongamos que no existe $u_0 \in X$ tal que $J(u_0) = \inf_{u\in X} J(u)$
y sea

$$c = \inf_{u\in X} J(u)$$

entonces

$$c \leq J(u), \forall u \in X$$

como

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} J^{-1}\left(\left]c+\frac{1}{n},+\infty\right[\right)$$

y X es compacto existen $n_1, n_2, n_3, ..., n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{j} J^{-1}(\left]c + \frac{1}{n_i}, +\infty\right[)$$

luego si $u \in X \longrightarrow u \in J^{-1}(\left]c + \frac{1}{n_i}, +\infty\right[)$, para algún $1 \leq i \leq j$ entonces

$$J(u) > c + \frac{1}{n_i}$$

si $n_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq j}\{n_i\}$
$n_0 \geq n_i \longrightarrow \frac{1}{n_i} \geq \frac{1}{n_0} \longrightarrow c + \frac{1}{n_i} \geq c + \frac{1}{n_0} \longrightarrow J(u) \geq c + \frac{1}{n_0}$ para algún $n_0 \in N$, tomando ínfimo obtenemos $c + \frac{1}{n_0} \leq \inf\limits_{u \in X} J(u) \longrightarrow c + \dfrac{1}{n_0} \leq c$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $u_0 \in X$ tal que $J(u_0) = \inf\limits_{u \in X} J(u)$

$\square$

Definición 1.4. *Un funcional $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sobre el espacio vectorial X es*

1. *Convexa: si para todo $u, v \in X$ y cada $t \in [0, 1]$ se tiene*

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v)$$

2. *Estrictamente convexa: si para todo $u, v \in X, u \neq v$ y cada $t \in (0, 1)$ se tiene*

$$J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v)$$

Definición 1.5. *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es un espacio métrico completo respecto a la métrica derivada de su norma.*

Definición 1.6. *Un funcional $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definido sobre el espacio de Banach X, es débilmente semicontinua inferior si*

$$u_n \rightharpoonup u \Longrightarrow J(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} J(u_n)$$

Definición 1.7. *Un funcional $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sobre el espacio de Banach X es coerciva si*

$$\lim_{\|u\|_X \to +\infty} J(u) = +\infty$$

Teorema 1.5. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes*

(a) C es débilmente cerrado

(b) C es fuertemente cerrado

Demostración. .
(a)$\longrightarrow$ (b)
Si C es débilmente cerrado entonces C es fuertemente cerrado, esto es consecuencia de la relación de las topologías.
(b)$\longrightarrow$(c)
Probemos que si C es fuertemente cerrado , C es débilmente cerrado, para esto veamos que el complemento de C es débilmente abierto . Sea $x_0 \in \complement C$, por Teorema de Hahn-Banach existe un hiperplano estrictamente cerrado separando x_0 y C, esto es existe algún $f \in X'$ y algún $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle \quad \forall y \in C$$

sea

$$V = \{x \in X : \langle f, x \rangle < \alpha\}$$

Tenemos $x_0 \in V$ y $V \cap C = \emptyset$, es decir $V \subset \complement C$ y V es débilmente abierto.Por lo tanto C es débilmente cerrado. $\square$

Teorema 1.6. *Sea $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcional convexa y semicontinua inferior sobre el espacio de Banach X, entonces J es débilmente semicontinua inferior. En particular, para toda sucesión $(u_n)_{n\in N} \subset X$ que converge débilmente para $u \in X$, tenemos*

$$J(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} J(u_n)$$

Demostración. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$A = \{x \in X : J(x) \leq \lambda\}$$

es convexo y fuertemente cerrado, y entonces por Teorema (1.5) es también débilmente cerrado esto es J es débilmente semicontinua inferior. $\square$

Observación 1.6.1. *Notemos que el teorema se puede aplicar también de la siguiente forma*
φ convexo y continua $\Longrightarrow$ φ es débilmente semicontinua inferior.

Observación 1.6.2. *La función $\varphi(x) = \|x\|$ es convexa y continua , entonces por el teorema probado es débilmente semicontinua inferior.*

Teorema 1.7. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, y sea $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional coercivo y débilmente semicontinuo inferior (no identicamente igual a $+\infty$), entonces J tiene un mínimo sobre X*

Demostración. Sea

$$m = \inf_{v \in X} J(v) < +\infty$$

y sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} J(v_n) = m$$

probemos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.Para lo cual, supongamos que no lo es, entonces existe una subsucesión $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|v_{n_k}\| = +\infty$$

como J es coercivo , tenemos

$$m = \lim_{n\longrightarrow+\infty} J(v_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} J(v_{n_k}) = +\infty$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(v_n)_{n\in N}$ es acotada en X y como X es reflexivo, existe una subsucesión (v_{n_k}) y un elemento $v \in X$ tal que $v_{n_k} \rightharpoonup v$ si $k \longrightarrow +\infty$. Luego ya que J es débilmente semicontinua inferior ,tenemos

$$m \leq J(v) \leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} J(v_{n_k}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} J(v_n) = m$$

por lo tanto

$$J(v) = m$$

esto prueba que J tiene un mínimo sobre X. $\square$

Teorema 1.8. *La norma en todo espacio de Banach X es débilmente semicontinua inferior*

Demostración. Ver [16] observación $(5{,}5{,}1)$ o [6] □

Dos elementos u y v en un espacio con producto escalar H, son ortogonales si $(u, v) = 0$ y dado un subconjunto M del espacio con producto escalar H , denotamos por $M^{\perp}$ el conjunto de elementos ortogonales a todo elemento de M

Teorema 1.9. *(El Teorema de la Proyección) Sea M un subespacio cerrrado de un espacio de Hilbert H entonces para todo $u \in H$, tenemos que $u = v + w$ donde $v \in M$ y $w \in M^{\perp}$*

Demostración. Ver [11] Teorema (5.6) □

Teorema 1.10. *Sea H un espacio de Hilbert y C un suconjunto cerrado,convexo y no vacio de H, y $h \in H$ entonces existe un único punto $u_0 \in C$ tal que*

$$\|h - u_0\| = dist(h, C) = inf\{\|h - u\| : u \in C\}$$

Demostración. Ver [6] Teorema (5.2) □

Como consecuencia importante del teorema de la proyección ortogonal vamos a recordar el dual de un espacio de Hilbert, concluyendo que se puede identificar con el propio espacio.

1.3. Espacio Dual

Definición 1.8. *Sea X un espacio vectorial normado , denotaremos por X' el conjunto de las funcionales $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineales y continuas, esto es*

$$X' = \{T : X \longrightarrow \mathbb{R}/T \textit{es lineal y continua}\}$$

el conjunto X' se llama el espacio dual de X

Teorema 1.11. *$T \in X'$ es continua si y solo si T es acotada.*

Demostración. Ver [17] paginas 186 y 187. □

Definición 1.9. *Para $T \in X'$ se define*

$$\|T\|_{X'} = sup\{|T(u)| : \|u\|_X \leq 1\} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \{|T(u)|\}$$

El número real $\|T\|_{X'}$ es llamado la norma de T.

Teorema 1.12. *Si X un espacio vectorial normado , entonces X' es completo.*

Demostración. Ver [17] Teorema (1) pagina 195 □

1.4. Teorema de Representación de Riesz

Este teorema provee una útil caracterización de las funcionales lineales acotadas sobre un espacio de Hilbert .

Nota : Si $u, v \in H$, con $(v|u)$ denotaremos el producto interno en un espacio de Hilbert H

Teorema 1.13. ***(Teorema De Representación De Riesz)*** *Para cada funcional lineal acotada T sobre un espacio de Hilbert H, existe un único elemento $v \in H$ tal que*

$$T(u) = (v|u), \forall u \in H \text{ y } \|T\| = \|v\| .$$

Demostración. Sea

$$N = \{u \in H / T(u) = 0\}.$$

Si $N = H$ basta tomar $v = 0$ y se cumple la afirmación.
Si $N \neq H$ ya que N es un subespacio cerrado de H por el teorema de la proyección existe un elemento $z \in H, z \neq 0$ tal que $(u|z) = 0, \forall u \in N$ luego $z \in N^{\perp}$ y z no pertenece a N por lo tanto $T(z) \neq 0$, además para cualquier $u \in H$ tenemos

$$T(u - \frac{T(u)}{T(z)} z) = T(u) - \frac{T(u)}{T(z)} T(z) = 0$$

esto significa que

$$u - \frac{T(u)}{T(z)} z \in N$$

y ya que $z \in N^{\perp}$ tenemos

$$(u - \frac{T(u)}{T(z)} z | z) = 0$$

efectuando

$$(u|z) = \frac{T(u)}{T(z)}\|z\|^2$$

de donde al despejar $T(u)$ obtenemos

$$T(u) = \frac{(u|z)}{\|z\|^2}T(z)$$

si consideramos $v = \dfrac{zT(z)}{\|z\|^2}$ se cumple que $T(u) = (v|u)$.

Unicidad de v

Supongamos que

$$T(u) = (v|u) \text{ y } T(u) = (v_1|u), \forall u \in H$$

entonces

$$(v|u) = (v_1|u), \forall u \in H$$

y como $v - v_1 \in H$

$$(v - v_1|v - v_1) = (v|v - v_1) - (v_1|v - v_1) = 0$$

luego

$$\|v - v_1\|^2 = 0 \longrightarrow v = v_1$$

Por lo tanto v es único.

Ahora probemos que $\|T\| = \|v\|$

como

$$\|T\| = \sup_{u\neq 0} \frac{(v|u)}{\|u\|} \leq \sup_{u\neq 0} \frac{\|u\|\|v\|}{\|u\|} = \|v\|$$

además , ya que T es acotada tenemos

$$\|v\|^2 = (v|v) = T(v) \leq \|T\|\|v\|$$

$$\|v\| \leq \|T\|$$

por lo tanto

$$\|T\| = \|v\|.$$

$\square$

Nota:El elemento $v \in H$, puede ser denotado como v_T para indicar la relación de dependencia que tiene con T.

1.5. Formas Bilineales

Definición 1.10. *Sea H un espacio de Hilbert. Una aplicación $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal si satisface:*

$$B(\lambda x + \beta y, z) = \lambda B(x + \beta y, z) + \beta B(\beta y, z)$$
$$B(z, \lambda x + \beta y) = \lambda B(z, x) + \beta a(z, y)$$

para todo $x, y, z \in H$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

Definición 1.11. *La forma bilineal B es **Continua** si existe $\beta \geq 0$ tal que*

$$|B(x, y)| \leq \beta \|x\| \|y\|, \forall x, y \in H; \beta \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.12. *La forma bilineal B es **Coerciva** si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|B(x, x)| \geq \alpha \|x\|^2, \forall x \in H; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.14. *Sea $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, entonces existe una aplicación lineal y continua $A : H \longrightarrow H$ tal que*

$$B(x, y) = (A(x)|y), \forall x, y \in H$$

Demostración. Como B es lineal y continua en la segunda coordenada , para cada $x \in H$ fijo, la aplicación $G : H \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(y) = B(x, y)$ es lineal y continua , esto es $G \in H'$. Por teorema de Riesz existe un unico vector $v_x \in H$ tal que $G(y) = (v_x|y), \forall x, y \in H$ es decir $B(x, y) = (v_x|y), \forall x, y \in H$ de este modo tenemos la aplicación $A : H \longrightarrow H$ definida por $A(x) = v_x$.

Probemos que A es lineal y continuo

i) Como $A(x + y) = v_{x+y}$

$(v_{x+y}|z) = B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z) = (v_x|z) + (v_y|z) = (v_x + v_y|z) = (A(x) + A(y)|z)$

luego $A(x + y) = A(x) + A(y)$

ii) Ya que $\|A(x)\|^2 = (A(x)|A(x)) = (v_x, A(x)) = a(x, A(x)) \leq \beta \|x\| \|A(x)\|$

tenemos $\|A(x)\| \leq \beta \|x\|$, es decir A es continuo $\square$

Definición 1.13. *Sean X, Y espacios de Banach, y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación , toda solución $x \in X$ de la ecuación*

$$Tx = x$$

es llamado punto fijo de T

Definición 1.14. *Sean (X, d) y $(Y; d')$ dos espacios métricos, y $T : X \longrightarrow Y$. La aplicación T es una contracción si existe un número θ , $0 \leq \theta < 1$, tal que*

$$d'(T(x), T(y)) \leq d(x, y), \forall x, y \in X$$

Teorema 1.15. *(Teorema del punto fijo de Banach)*
Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $T : X \longrightarrow X$ una aplicación contracción, entonces existe un único $\overline{x} \in X$ tal que

$$T(\overline{x}) = \overline{x}$$

Demostración. .
Existencia:
Sea $x_0 \in X$ fijado y definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= T(x_0) \\ x_2 &= T(x_1) \\ x_3 &= T(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= T(x_{n-1}) \end{aligned}$$

ya que T es una aplicación contracción tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \theta d(x_n, x_{n-1})$$

de aquí en forma similar obtenemos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n-1}) &\leq \theta d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ d(x_{n-1}, x_{n-2}) &\leq \theta d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\ &\vdots \\ d(x_2, x_1) &\leq \theta d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

por lo tanto :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0)$$

considerando la desigualdad triangular y $m \leq n$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \theta^k d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0)\frac{\theta^m - \theta^n}{1-\theta}$$

como $\theta \in [0,1)$ entonces $\{\theta^k\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, que converge para cero , esto implica que la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d), y como este espacio es completo la sucesión $\{x_n\}$, es convergente y existe $\overline{x} \in X$, tal que

$$x_n \longrightarrow \overline{x}$$

ya que T es continuo tenemos que

$$T(x_n) \longrightarrow T(\overline{x})$$

también se tiene que $T(x_n) = x_{n+1} \longrightarrow \overline{x}$, como el límite es único $T(\overline{x}) = \overline{x}$.

Unicidad:

Supongamos que existen $\overline{x}, \overline{y}$ tales que $T(\overline{x}) = \overline{x}$ y $T(\overline{y}) = \overline{y}$, ya que T es una aplicación contracción

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T(\overline{x}), T(\overline{y})) \leq \theta d(\overline{x}, \overline{y})$$

si $d(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$, se tiene que $1 \leq \theta$, lo cual es una contradicción ya que $\theta \in [0,1)$. Por lo tanto $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ entonces $\overline{x} = \overline{y}$ $\square$

1.6. Teorema de Lax- Milgram

Teorema 1.16. ***(Teorema de Lax-Milgram)*** *Sea $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva , sea T un elemento de H', entonces existe un único $\overline{x} \in H$ tal que*

$$B(\overline{x}, z) = \langle T, z\rangle, \forall z \in H$$

donde $\langle T, z\rangle$ denota la evaluación $T(z)$

Demostración. Por hipótesis tenemos que B es una forma bilineal continua entonces por teorema (1.14) existe una aplicación lineal y continua $A : H \longrightarrow H$ tal que

$$B(x,z) = (A(x)|z), \forall x, z \in H$$

además $T \in H'$ entonces por 1.13 teorema de representación de Riesz , existe un único $y \in H$ tal que

$$\langle T, z\rangle = (y|z), \forall z \in H$$

por lo tanto resolver la ecuación

$$B(\overline{x}, z) = \langle T, z\rangle, \forall z \in H$$

es equivalente a resolver la ecuación

$$(A(\overline{x})|z) = (y|z), \forall z \in H$$

es decir

$$A(\overline{x}) = y$$

Dado $\lambda > 0$, esta ecuación es equivalente a

$$\overline{x} = \overline{x} - \lambda A(\overline{x}) + \lambda y$$

El cual es un problema de punto fijo para la función

$$S(x) = x - \lambda A(x) + \lambda y$$

debido a la linealidad de A obtenemos

$$S(x_1) - S(x_2) = x_1 - \lambda A(x_1) + \lambda y - x_2 + \lambda A(x_2) - \lambda y = x_1 - x_2 - \lambda A(x_1 - x_2)$$

para probar que S es una aplicación contracción debemos probar que existe $\lambda > 0$ tal que $\|x - \lambda A(x)\| \leq \theta\|x\|$ para algún $\theta < 1$ y para todo $x \in H$, teneniendo en cuenta que

$$\|x - \lambda A(x)\|^2 = (x - \lambda A(x)|x - \lambda A(x)) = \|x\|^2 - 2\lambda(A(x)|x) + \lambda^2\|A(x)\|^2 \quad (1.1)$$

como $B(x,y) = (A(x)|y)$ entonces

$$\|A(x)\|^2 = (A(x)|A(x)) = B(x, A(x)) \leq \beta\|x\|\|A(x)\|$$

de donde obtenemos

$$\|A(x)\| \leq \beta\|x\| \tag{1.2}$$

y ya que B es coercivo:

$$B(x, x) = (A(x)|x) \geq \alpha\|x\|^2 \tag{1.3}$$

teniendo en cuenta (1.2)y (1.3) en (1.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|x - \lambda A(x)\|^2 &= \|x\|^2 - 2\lambda(A(x)|x) + \lambda^2\|A(x)\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 - 2\lambda\alpha\|x\|^2 + \lambda^2\beta^2\|x\|^2 \\
&= (1 + \lambda^2\beta^2 - 2\lambda\alpha)\|x\|^2
\end{aligned}$$

si

$$\lambda^2\beta^2 - 2\lambda\alpha < 0 \longrightarrow 1 + \lambda^2\beta^2 - 2\lambda\alpha < 1$$

luego, para

$$0 < \lambda < \frac{2\alpha}{\beta^2}$$

se tiene $\theta < 1$ donde

$$\theta = 1 + \lambda^2\beta^2 - 2\lambda\alpha$$

en consecuencia S es una aplicación contracción y por teorema (1.15), existe un único $\overline{x} \in H$ tal que $S(\overline{x}) = \overline{x}$. □

Teorema 1.17. ***(Teorema Del Punto Fijo de Brouwer)***
Sea $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ un disco unitario cerrado, y $T : \overline{D} \longrightarrow \overline{D}$ una aplicación continua , entonces T tiene un punto fijo.

Demostración. Ver [16] Teorema (5.2.3) o [24] □

Corolario 1.17.1. *Sea M un subconjunto no vacio, convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ donde $n \geq 1$ y que $T : M \longrightarrow M$ es una función continua, entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ un disco unitario cerrado, que contiene a M , dado $u \in \overline{D}$ por teorema 1.10 existe un único punto $v \in M$ tal que $dist(u, v) = dist(u, M)$ esto permite definir $F : \overline{D} \longrightarrow M$ del siguiente modo , para $u \in \overline{D}$ tomamos v a menor distancia de u y definimos $F(u) = v_M$, donde v_M es el único punto de M que satisface

$$\|u - v_M\| = dist(u, M)$$

luego tenemos definida la aplicación continua $F : \overline{D} \longrightarrow M \subset \overline{D}$, que cumple $F(u) = u, \forall u \in M$. Además $T \circ F : \overline{D} \longrightarrow M \subset \overline{D}$ es continua , por (1.17) teorema del punto fijo de Brouwer existe un punto fijo $u = (T \circ F)(u)$ y como $(T \circ F)(\overline{D}) \subset M$ se tiene que $u \in M$ por lo tanto

$$u = T(F(u)) = T(u)$$

□

1.7. Teorema del punto fijo de Schauder

Aplicación de Schauder: Sea K un subconjunto de un espacio de Banach X , supongamos que para $\epsilon > 0$ fijo , existe $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset X$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(a_i).$$

Para $x \in X$, definimos $F_i : K \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \|x - a_i\| \geq \epsilon, \\ \epsilon - \|x - a_i\| & \text{si} \quad \|x - a_i\| \leq \epsilon. \end{cases}$$

dado $x \in K$, existirá un $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que

$$\|x - a_{i_0}\| < \epsilon$$

por lo cual podemos afirmar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i(x) > 0$ esto permite definir la aplicación

$$G_A : K \longrightarrow K_0 = K \cap \langle A \rangle$$

como

$$G_A(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i(x) a_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i(x)}$$

Nota: $\langle A \rangle$ denota el espacio generado por A

Lema 1.1. *$G_A : K \longrightarrow K_0$ es continua y $\|G_A(x) - x\| < \epsilon$*

Demostración. Probemos que cada F_i es continua para cada $a_i \in A$

Sean $x_1 \in B_\epsilon(a_i)$ y $x_2 \in K - B_\epsilon(a_i)$ con $\|x_2 - x_1\| < \delta$.

Para $\epsilon' > 0$ consideramos , $0 < \delta \leq \epsilon'$ entonces

$$|F_i(x_1) - F_i(x_2)| = |\epsilon - \|x_1 - a_i\|| \leq |\|x_2 - a_i\| - \|x_1 - a_i\|| \leq \|x_2 - x_1\| < \delta \leq \epsilon'$$

por lo tanto F_i es continua, esto implica que G_A es continua en K . Además se tiene que

$$\|x - G_A(x)\| = \|\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i(x)(a_i - x)}{\sum_{i=1}^{n} F_i(x)}\|$$

teniendo en cuenta que, si $\|x - a_i\| \geq \epsilon$ entonces $F_i(x) = 0$ obtenemos

$$\|x - G_A(x)\| \leq \frac{\sum_{i:\|x-a_i\|<\epsilon} F_i(x)\|a_i - x\|}{\sum_{i:\|x-a_i\|<\epsilon} F_i(x)} \leq \epsilon$$

□

Teorema 1.18. ***(Teorema del punto fijo de Schauder)*** *Sea K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X y sea $T : K \longrightarrow K$ una función continua tal que $\overline{T(K)}$ es compacto, entonces T tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Sea $K_0 = \overline{T(K)}$.

Para cada n tomamos $A_n \subset K_0$ finito, tal que $K_0 \subset \cup_{a \in A_n} B_{\frac{1}{n}}(a)$, consideramos también G_{A_n} como en el lema (1.1). Como G_{A_n} es una combinación convexa de los elementos de A_n se tiene que $G_{A_n}(K_0) \subset K$, entonces definimos

$$T_n = G_{A_n} \circ T : K \longrightarrow K$$

luego por lema (1.1) obtenemos

$$\|T_n(x) - T(x)\| < \frac{1}{n}, \forall x \in K \tag{1.4}$$

además consideramos

$$X_n = \langle A_n \rangle \text{ y } K_n = K \cap X_n$$

entonces K_n es compacto y convexo , además $T_n : K_n \longrightarrow K_n$ es continua , como X_n es de dimensión finita aplicamos 1.17.1 corolario del teorema de Brouwer , por lo cual existe $x_n \in K_n$ tal que $T_n(x_n) = x_n$. Como $\{T(x_n)\} \subset K_0$, existe una subsucesión convergente a un punto de K_0, por ser K_0 compacto, esto es $T(x_{n_k}) \longrightarrow x_0$ y por (1.4) tenemos

$$\|x_{n_k} - x_0\| \leq \|T_{n_k}(x_{n_k}) - T(x_{n_k})\| + \|T(x_{n_k}) - x_0\| \longrightarrow 0$$

además como T es continua $T(x_{n_k}) \longrightarrow T(x_0)$ y se tenia $T(x_{n_k}) \longrightarrow x_0$ por lo tanto obtenemos $T(x_0) = x_0$ $\square$

1.8. Convergencia Débil

Definición 1.15. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de un espacio de Banach X , converge débil a $x \in X$ si y solamente si $T(x_n)$ converge a $T(x)$ para todo $T \in X'$*

Observación 1.13.1 En forma simbólica la definición anterior se expresa del siguiente modo:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ en X} \Longleftrightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x), \forall T \in X'$$

donde $x_n \rightharpoonup x$ denota la convergencia débil de x_n a x en X.

Observación 1.13.2 La convergencia fuerte implica la convergenci débil

En efecto: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge fuerte a $x \in X$, es decir $x_n \longrightarrow x$ en X, entonces para toda función continua T se tiene

$$T(x_n) \longrightarrow T(x)$$

en particular para las funciones lineales y continuas se cumple esta convergencia. Por lo tanto si $x_n \longrightarrow x$ entonces

$$T(x_n) \longrightarrow T(x), \forall T \in X'$$

Observación 1.13.3 Si $x_n \rightharpoonup x$ no es cierto en general que $x_n \longrightarrow x$, la afirmación reciproca de la observación (1.13.2) se cumple en dimensión finita, es decir,si X es un espacio normado de dimensión finita , entonces la convergencia débil y la convergencia fuerte son equivalentes.

1.9. Espacios Reflexivos

Asi como se construye el espacio dual de un espacio vectorial también se puede construir el espacio dual del dual esto es:

$$X'' = (X')' = \{S : X' \longrightarrow \mathbb{R},\ S \text{ es lineal y continua}\}$$

El espacio X'' es también un espacio normado y completo, la norma de este espacio está dada por

$$\|S\| = \sup_{T \in X', \|T\| \leq 1} |\langle S, T \rangle|$$

Podemos relacionar X y X'' definiendo la aplicación $J : X \longrightarrow X''$, para cada $x \in X$ del siguiente modo

$$\langle J(x), T \rangle = \langle T, x \rangle, \forall T \in X'$$

La aplicación J asi definida es lineal, continua y una isométria.
Nota: Con $\langle J(x), T \rangle$ denotamos la evaluación de $J(x)$ en T

Definición 1.16. *Sea X un espacio de Banach , diremos que X es reflexivo cuando la aplicación $J : X \longrightarrow X''$ definida por*

$$\langle J(x), T \rangle = T(x),\ x \in X, T \in X'$$

Es sobreyectiva.

Teorema 1.19. *Todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo*

Demostración. Ver [6] Proposición (3.20) □

Teorema 1.20. *Sea X un espacio reflexivo y separable , entonces el disco $\overline{D}$ unitario cerrado de X , es un conjunto compacto respecto a la topología débil.*

Demostración. Ver [6] Teorema (3.17) □

Teorema 1.21. *X es un espacio reflexivo si y solamente si toda sucesión acotada posee una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Ver [6] Teoremas (3.18) y (3.19) □

1.10. Resultados de Integración

En esta sección recordaremos algunos resultados importantes acerca de integración la demostración de estos resultados se puede ver por ejemplo en [14] sección (4.2). Con Ω denotaremos un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, dotado de la medida de Lebesgue dx. Denotamos con $L^1(\Omega)$ el espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores en $\mathbb{R}$. Se escribe

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Como es habitual se identifican dos funciones de $L^1(\Omega)$ que coinciden en casi todo punto (c.t.p)

Teorema 1.22. ***(Teorema de la Convergencia Monótona)***
Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ que satisface
(a) $f_1 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$ c.t.p $x \in \Omega$
(b) $\sup_n \int_\Omega f_n(x)dx < +\infty$
Entonces $f_n(x)$ converge en c.t.p en Ω hacia un límite finito , denotado por $f(x)$; la función f pertenece a $L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$.

Lema 1.2. ***(Lema de Fatou)***
Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ que satisface
(a) Para todo n,$f_n(x) \geq 0$ en c.t.p $x \in \Omega$
(b) $\sup_n \int_\Omega f_n(x)dx < +\infty$
para casi todo $x \in \Omega$, denotamos $f(x) = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \leq \infty$ entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$$

Teorema 1.23. ***(Teorema de la Convergencia Dominada)***
Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de fuciones de $L^1(\Omega)$ que satisface
(a)$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p en Ω
(b)) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n ,$|f_n(x)| \leq g(x)$,c.t.p en Ω
Entonces f pertenece a $L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$, es decir

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

1.11. Espacios L^p

Definición 1.17. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < +\infty$, definimos el espacio*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y} |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Definición 1.18. *Definimos el espacio*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y existe } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p } x \in \Omega\}$$

con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ c.t.p } x \in \Omega\}$$

Notación:

Sea $1 \leq p \leq \infty$ denotaremos por p' el exponente conjugado de p , es decir

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Teorema 1.24. ***(Teorema de la Desigualdad de Young)*** *indicamos las dos formas usuales de esta desigualdad*
(a) Sea $1 < p < \infty$ entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, a, b \geq 0$
(b) Sea $1 < p < \infty$ entonces $ab \leq \delta a^p + \frac{(\delta p)^{-\frac{p'}{p}}}{p'} b^{p'}, a, b \geq 0$

Demostración. Ver [20] □

Teorema 1.25. ***(Teorema de la Desigualdad de Holder)***
Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$
entonces

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ y } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Demostración. Ver [6],[20] □

El siguiente teorema generaliza este resultado

Teorema 1.26. *Si para* $p_i \geq 1, i = 1, 2, 3, ..., m$ *se tiene*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 y\ f_i \in L^{p_i}(\Omega) \text{ para } i = 1, 2, 3, ..., m$$

entonces

$$\prod_{i=1}^{m} f_i \in L^p(\Omega) \text{ y } \int_\Omega |\prod_{i=1}^{m} f_i| dx \leq \prod_{i=1}^{m} \{\int_\Omega |f_i(x)|^{p_i} dx\}^{\frac{1}{p_i}}$$

es decir

$$\|f_1 f_2 ... f_m\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} ... \|f_m\|_{p_m}.$$

Demostración. Ver [5],[6]o [20] □

Teorema 1.27. ***(Desigualdad de Interpolación)***
Si $f \in L^p(\Omega) \bigcap L^{p'}(\Omega)$ *donde* $1 \leq p \leq p' \leq +\infty$
entonces

$$f \in L^r(\Omega), \text{para todo } \ p \leq r \leq p' \ \text{ y } \|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_{p'}^{1-\alpha}$$

donde

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p'}$$

Demostración. Ver [5] o [6] □

Teorema 1.28. $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach para todo* $1 \leq p \leq +\infty$

Observaciones

1. Si $m(\Omega) < +\infty$ y $1 < p < q < +\infty$ entonces

$$L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

En efecto,sea $r = \dfrac{q}{p} > 1$ entonces

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \leq (\int_\Omega |f(x)|^{pr} dx)^{\frac{1}{r}} (\int_\Omega 1^{r'} dx)^{\frac{1}{r'}} = \|f\|_q^p m(\Omega)^{\frac{1}{r'}}, \text{para } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

de donde obtenemos

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_q^p m(\Omega)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q m(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

en forma similar

$$\|f\|_q \leq \|f\|_\infty m(\Omega)^{\frac{1}{q}}$$

2. Sea f un funcional lineal y continua, definida en $L^p(\Omega)$, entonces existe una función
   $u \in L^p(\Omega)$ satisfaciendo

$$\int_\Omega |u(x)|dx = 1 \text{ y } f(u) = \|f\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Teorema 1.29. ***(Teorema de Representación de Riesz)***
Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y denotemos por T un operador lineal y acotado definido sobre $L^p(\Omega)$, entonces existe una función $f \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ satisfaciendo

$$T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \forall v \in L^p(\Omega)$$

Demostración. Ver [6], [20] □

Teorema 1.30. *Toda sucesión acotada en $L^p(\Omega)$ con $p > 1$, posee una subsucesión que converge débil en $L^p(\Omega)$*

Demostración. Ver [6] □

Teorema 1.31. *Si $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge fuerte para u en $L^p(\Omega)$ y $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge débil para $v \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \int_\Omega u_\nu v_\nu dx = \int_\Omega uvdx$*

Demostración. Ver [6],[9] □

El siguiente teorema es una generalización del Teorema de la Convergencia Dominada

Teorema 1.32. *Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de funciones de $L^p(\Omega)$ y que satisfacen*
(a)$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p en Ω
(b) Existe una función $g \in L^p(\Omega)$ tal que $g_n(x) \longrightarrow g(x)$ c.t.p $x \in \Omega$ y para cada n,

$$|f_n(x)| \leq g_n(x) \text{ c.t.p } x \in \Omega$$

entonces

$$f \in L^p(\Omega) \text{ y } \|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$$

Demostración. Ver [6],[24] □

1.12. Espacio de las Funciones de Prueba y Distribuciones

Definición 1.19. *Una sucesión* $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ *es convergente para* $\varphi \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ *cuando se cumplen las siguientes condiciones*

1. *Los soportes de todas las funciones de prueba* φ_ν *de la sucesión dada pertenecen a un compacto fijo de* Ω*, es decir:*

$$\varphi_\nu \text{ converge a } \varphi \Longleftrightarrow \text{existe } K \text{ compacto }, K \subset \Omega \text{ tal que } sop(\varphi_\nu - \varphi) \subset K$$

2. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *, la sucesión* $\{D^\alpha\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\{D^\alpha\varphi\}$ *uniformemente en* Ω*. Es decir :*

$$D^\alpha\varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha\varphi \text{ uniformemente en}$$
$$K \Longleftrightarrow \max_{x\in K,\nu\longrightarrow\infty} |D^\alpha\varphi_\nu(x) - D^\alpha\varphi(x)| \longrightarrow 0$$

El espacio vectorial $C_0^{+\infty}(\Omega)$ con esta noción de convergencia se llama espacio de funciones de prueba y se denota por $(C_0^{+\infty}(\Omega), \longrightarrow) \equiv D(\Omega)$

Distribuciones

Definición 1.20. *Sea* Ω *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$*, una distribución sobre* Ω *es toda función* $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *lineal y continua .El conjunto de distribuciones sobre* Ω *se denota por* $D'(\Omega)$*, es decir*

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{lineal y continua}\}$$

Ejemplos

1. Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definimos $T_u : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

   (a) T_u está bien definida

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi\rangle| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi(x)|dx &= \int_{sop(\varphi)=K} |u(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq \max_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |u(x)|dx \\ &= \max_{x\in K} |\varphi(x)| C(K). \end{aligned}$$

(b) T_u es lineal

$$\begin{aligned}\langle T_u, \varphi + \psi \rangle &= \int_{\Omega} u(x)(\varphi(x) + \psi(x))dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} u(x)\psi(x)dx \\ &= \langle T_u, \varphi \rangle + \langle T_u, \psi \rangle\end{aligned}$$

(c) T_u es continua

Sea $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega)$,$\varphi \in D(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ en $D(\Omega)$ esto significa que :

(1) Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $sop(\varphi_\nu - \varphi) \subset K, \forall \nu$

(2) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente en K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

En particular para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, $\max\limits_{x \in K} |\varphi_\nu \longrightarrow \varphi| \longrightarrow 0$ si $\nu \longrightarrow +\infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}|\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| \\ &= |\int_{\Omega} u(x)(\varphi_\nu(x) - \varphi(x))dx| \\ &\leq \int_K |u(x)||\varphi_\nu(x) - \varphi(x)|dx \\ &\leq \max_{x \in K} |\varphi_\nu(x) - \varphi(x)|C(k) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Luego $\langle T_u, \varphi_\nu \rangle \longrightarrow \langle T_u, \varphi \rangle$, en $\mathbb{R}$

2. La aplicación $\Phi : L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow D'(\Omega)$ definida por $\Phi = T_u$ es lineal, continua e inyectiva.

(a) Φ es lineal

Tenemos que $\Phi(u + v) = T_{u+v}$ entonces

$$\begin{aligned}\langle T_{u+v}, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} (u(x) + v(x))\varphi(x)dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx \\ &= \langle T_u, \varphi \rangle + \langle T_v, \varphi \rangle \\ &= \langle T_u + T_v, \varphi \rangle\end{aligned}$$

de donde se tiene $T_{u+v} = T_u + T_v$ por lo tanto $\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$

(b) Φ es inyectiva

Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\Phi(u) = \Phi(v)$ entonces

$$
\begin{aligned}
T_u &= T_v \\
\langle T_u, \varphi\rangle &= \langle T_v, \varphi\rangle \\
\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx &= \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \\
\int_\Omega (u(x) - v(x))\varphi(x)dx &= 0, \forall \varphi \in D(\Omega)
\end{aligned}
$$

De aquí obtenemos $u(x) = v(x)$ en c.t.p $x \in \Omega$ por lo tanto $u = v$

(c) Φ es continua

Sea $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega), u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $u_\nu \longrightarrow u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$, entonces

$$
\begin{aligned}
|\langle T_{u_\nu}, \varphi\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| &= |\int_\Omega u_\nu(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx| \\
&\leq \int_\Omega |u_\nu(x) - u(x)||\varphi(x)|dx, K = sop(\varphi) \\
&\leq \max_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |u_\nu - u(x)|dx \\
&= C_\varphi \|u_\nu - u\|_{L^1_{loc}} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

entonces

$$T_{u_\nu} \longrightarrow T_u \text{ en } D'(\Omega)$$

esto es

$$\Phi(u_\nu) \longrightarrow \Phi(u) \text{ en } D'(\Omega)$$

es decir Φ es continua. En conclusión se tiene la inmersión continua

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

.

3. Se tiene las siguientes inmersiones continuas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

4. Cada distribución T_u para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se identifica con u es decir :

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

1.13. Derivada de una Distribución

Definición 1.21. *Sea $T \in D'(\Omega)$, la derivada de orden α denotada por $D^\alpha T$, con $\alpha \in \mathbb{N}^n$ está dada por :*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Se prueba sin dificultad que $D^\alpha T \in D'(\Omega)$

1.14. Espacios de Sobolev

Definición 1.22. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $1 \leq p < +\infty$. Si m es un entero no negativo, $u \in L^p(\Omega)$ y existe la derivada distribucional $D^\alpha u$ para cualquier α con $|\alpha| \leq m$ tal que $D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m$, entonces diremos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$, es decir*

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u$*(en sentido de las distribuciones)*$\in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \exists u_\alpha \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi dx, \forall |\alpha| \leq m\}$

denotamos $u_\alpha = D^\alpha u$

$W^{m,p}(\Omega)$ es llamado Espacio de Sobolev sobre Ω y está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$$

Cuando $p = 2$ estos espacios son denotados por $H^m(\Omega)$, es decir

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

El espacio $H^m(\Omega)$ tiene un producto interno natural definido por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

y $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert

Teorema 1.33. *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach*

Demostración. Ver [6],[16] □

Teorema 1.34. *Sean* $\alpha \in \mathbb{N}^n, \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\Omega)$ *y* $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ *tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = u \;\; y \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} D^\alpha u_n = v_\alpha \;\; en \;\; L^p(\Omega)$$

entonces

$$v_\alpha = D^\alpha u$$

Demostración. Ver [1],[6],[7] □

Teorema 1.35. *Sea* Ω *un conjunto abierto no vacio de* $\mathbb{R}^n$*,* $m \geq 1$ *un entero y* $1 \leq p < \infty$*. Se tiene*

(a) $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio reflexivo si* $1 < p < +\infty$

(b) $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio separable si* $1 \leq p < +\infty$

Demostración. Ver [6],[16] □

Definición 1.23. *Sea* $m \geq 1$ *un entero y* $1 \leq p \leq +\infty$*. Definimos* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como la cerradura de* $D(\Omega)$ *en* $W^{m,p}(\Omega)$ *es decir*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

en el caso particularsi $p = 2$ *usaremos la notación*

$$H_0^m = W_0^{m,2}(\Omega)$$

Observaciones

(1) $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{m,p}(\Omega)$ con la norma $\|.\|_{m,p}$ y es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de $W^{m,p}(\Omega)$.

(2) En el caso $p = 2$ al igual que $H^m(\Omega)$, H_0^m es un espacio de Hilbert con el producto

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

(3) Decir que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ es equivalente a decir que existe una sucesión

$$(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset D(\Omega)$$

tal que

$$\varphi_n \longrightarrow u \ en \ W^{m,p}(\Omega)$$

es decir

$$D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha u \ en \ L^p(\Omega), \ \forall |\alpha| \leq m$$

Teorema 1.36. ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Sea $p \geq 1$, Ω acotado, entonces existe una constante C dependiendo de Ω, n y p tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

Demostración. .

(1) Sea $\Omega = (-a, a)^n, a > 0$ y $u \in D(\Omega)$,
si $x = (x', x_n)$ tenemos

$$u(x', x_n) - u(x', -a) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$

como $u(x', -a) = 0$ ya que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenemos

$$u(x', x_n) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$

de donde

$$|u(x', x_n)| \leq \int_{-a}^{x_n} |\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt|$$

por desigualdad de Holder

$$|u(x', x_n)| \leq (\int_{-a}^{x_n} |\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_{-a}^{x_n} 1^q dt)^{\frac{1}{q}}$$

$$|u(x)|^p \leq |x_n + a|^{\frac{p}{q}} \int_{-a}^{a} |\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)|^p dt$$

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx' \leq (2a)^{\frac{p}{q}} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)|^p dt$$

integrando obtenemos

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)|^p dt$$

de manera similar se tiene para las otras coordenadas

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^p dx \text{ , } i = 1,2,3,...,n$$

de donde obtenemos

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq \frac{(2a)^{\frac{p}{q}+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^p dx$$

por lo tanto

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega,n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

como $D(\Omega)$ es denso en $W_0^{m,p}(\Omega)$ la desigualdad vale para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(2) Si Ω no es un cubo n -dimensional , por ser acotado existe $\widetilde{\Omega} = (-a,a)^n$ que lo contiene y extendiendo con cero a $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es decir

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \widetilde{\Omega} - \Omega. \end{cases}$$

y aplicando a $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\widetilde{\Omega})$ el caso (i) que es válido para $\widetilde{\Omega}$ obtenemos la desigualdad buscada.

□

Observaciones

1. En particular como consecuencia de la desigualdad de Poincaré la expresión

$$\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p)^{\frac{1}{p}} = \|\nabla u\|_p$$

define una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma sobre $W^{1,p}(\Omega)$, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotada.En efecto, de la definición tenemos

$$\|u\| \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.5}$$

y como

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p} = (\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_p^p)^{\frac{1}{p}} = (\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

entonces

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq C_1(\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p)$$

de aqui obtenemos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|u\| \tag{1.6}$$

de (1.5) y (1.6) se tiene la equivalencia de las normas.

2. En particular, sobre $H_0^1(\Omega)$ el producto interno

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

determina una norma $\|u\|$ equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

Lema 1.3. *Sean $n \geq 2, f_1, f_2, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$, para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos*

$$\widehat{x_i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\ ,\ 1 \leq i \leq n \text{ y}$$
$$f(x) = f_1(\widehat{x_1})f_2(\widehat{x_2})...f_n(\widehat{x_n})$$

entonces

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ y} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |f_i(\widehat{x_i})| \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Demostración. Ver [6],[7],[16] □

Teorema 1.37. ***(Desigualdad de Sobolev)***
Sea $1 \leq p < n$ y $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, entonces existe una constante $C = C(n, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

En particular tenemos la inclusión continua .

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. .

(1) Sea $u \in D(\mathbb{R}^n)$, entonces para $1 \leq i \leq n$ podemos escribir

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)|dt = f_i(\widehat{x_i})$$

de donde

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(\widehat{x_i})$$
$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} |f_i(\widehat{x_i})|^{\frac{1}{n-1}}$$

Como u tiene soporte compacto , $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ es integrable , entonces

$$|f_i(\widehat{x_i})|^{\frac{1}{n-1}} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y por Lema (1.3) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}$$

Como $\dfrac{n}{n-1} = 1^*$

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}$$

(2) Sea $1 \leq p < n$

Para $u \in D(\mathbb{R}^n)$ sea $t \geq 1$ y consideremos la función $|u|^{t-1}u$. Esta función tiene soporte compacto y es continuamente diferenciable , ya que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^{t-1}u) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^{t-1})u + |u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= (t-1)|u|^{t-2}\frac{u}{|u|}\frac{\partial u}{\partial x_i}u + |u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= t|u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Luego podemos aplicar la desigualdad obtenida en (1) para la función $|u|^{t-1}u$

$$\||u|^{t-1}u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|t|u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}$$

por Holder y teniendo en cuenta que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\|u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq t\|u\|^{n-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^{\frac{1}{n}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.7}$$

Eligiendo t tal que

$$\frac{tn}{n-1} = p'(t-1) \longrightarrow t = \frac{np-p}{n-p} = (\frac{n-1}{n})p^*$$

que es mayor o igual a uno ya que $n > p$ entonces por (1.7) tenemos:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq (\tfrac{n-1}{n})p^* \prod_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^{\frac{1}{n}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

de donde obtenemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq (\frac{n-1}{n})p^*\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.8}$$

(3) Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una sucesión $(u_m) \subset D(\mathbb{R}^n)$ tal que se tiene $u_m \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, y por la desigualdad obtenida en (1.8) tenemos

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \text{ si } m, l \longrightarrow +\infty$$

Luego (u_m) es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Como (u_m) ya converge a u en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ debemos tener $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ y que $u_m \longrightarrow u$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, de (1.8) y por continuidad obtenemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n}, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

□

Corolario 1.37.1. *Si $1 \leq p < n$, entonces se tiene la inclusión continua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\,, \forall q \in [p, p^*]$$

Demostración. Ver [16] □

Corolario 1.37.2. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ entonces $u \in L^q(\Omega)$ para $q \in [p, p^*]$ y existe una constante $C_p = C(n,p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad (1)$$

$$\|u\|_{L^{q}(\Omega)} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad (2)$$

Para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Ver [7],[13] □

Teorema 1.38. ***(Teorema Fundamental de Inmersión)***

Sea $1 \leq p < +\infty, p \in \mathbb{R}, n \geq 2, mp < n$ *, entonces la inmersión de* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^q(\mathbb{R}^n)$ *es continua y* q *satisface* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$

Demostración. Ver [16] □

Teorema 1.39. ***(Teorema de Rellich -Kondrachov)***

Sea Ω *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *,*Ω *de clase* C^1 *y* $1 \leq p \leq \infty$ *, entonces las siguientes inmersiones son compactas*

a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < p^*$ *si* $p < n$

b) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$ *si* $p = n$

c) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *si* $p > n$

Demostración. Ver [6],[13],[16] □

Espacio $W^{-m,q}(\Omega)$

Definición 1.24. *Sea* $1 \leq p < +\infty$ *y* $q > 1$*, tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *, denotamos con* $W^{-m,q}(\Omega)$ *el dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$*, es decir*

$$W^{-m,q}(\Omega) = \{T : W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , tal que } T \text{ es lineal y continua } \}$$

El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ *se denota por* $H^{-m}(\Omega)$

Capítulo 2

Existencia de Solución Débil para una Ecuación Elíptica No Lineal

2.1. Motivación Física

Consideremos el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,y para un volumen $U \subseteq \Omega$ arbitrario de material se plantea como válida la siguiente relación del balance de la energía

$$\frac{d}{dt}Q(U) = -\Phi(\partial U) + F(U)$$

Donde

$Q(U)$ representa la energía contenida en U al tiempo t

$\Phi(\partial U)$ es el flujo de energía saliente por unidad de tiempo a traves de la frontera ∂U

$F(U)$ es la energía creada o gastada dentro de U por unidad de tiempo.

Asumiremos que estas cantidades vienen dadas por las relaciones

$$Q(U) = \int_U e(x,t)\rho(x,t)dx, \;\; \Phi(\partial U) \;\; = \int_{\partial U} \phi(x,t).\overrightarrow{n}dS, \;\; F(U) = \int_U f(x,t)dx$$

Donde

$e(x,t)$ representa la energía por unidad de masa , $\rho(x,t)$ es la densidad de masa del material, $\phi(x,t)$ es la tasa de flujo por unidad de superficie por unidad de tiempo, $\overrightarrow{n}$ es el vector normal unitario exterior a U y $f(x,t)$ es la densidad de energía creada por unidad de tiempo.

Asumiendo que el sistema está en equilibrio

$$\tfrac{d}{dt}Q(U) = 0$$

tenemos

$$0 = -\int_{\partial U} \phi(x,t).ndS + \int_U f(x,t)dx$$

aplicando el teorema de la divergencia resulta

$$\int_U \left[-div\phi(x,t) + f(x,t)\right] dx = 0, \forall U \subset \Omega$$

de donde obtenemos la igualdad

$$[-div\phi(x,t) + f(x,t)] = 0 \text{ en } \Omega$$

Llamada la Ecuación de la Continuidad. Para estudiar esta ecuación se utilizan las Leyes Constitutivas . La más usual es la Ley de Fourier que establece que el flujo viene dado por un múltiplo del gradiente de un cierto potencial u es decir

$$\phi(x,t) = -k\nabla u$$

Donde $k \geq 0$ es llamada la constante de difusividad térmica. La constante de difusividad k como la densidad de energía f pueden depender de la ubicación espacial x , del valor de la temperatura $u(x)$ en ese punto y del valor de gradiente de temperatura $\nabla u(x)$, es decir que

$$k = k(x,u,\nabla u) \text{ y } f = f(x,u,\nabla u) \text{ en } \Omega$$

por lo que hemos llegado a una ecuación de la forma

$$[div(k(x,u,\nabla u)\nabla u) + f(x,u,\nabla u)] = 0 \text{ en } \Omega$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden elíptica cuasilineal en forma de divergencia. En particular estamos interesados en la ecuación

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Para probar la existencia de la solución débil de la ecuación (2.1) consideraremos que

$$a : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una función continua , tal que

$$\alpha \leq a(x,s) \leq \beta, \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq \beta \ \in \mathbb{R}$$

Con esta consideración y dada una función $f \in L^{2_*}(\Omega)$ donde $2_* = \dfrac{2n}{n-2}$, deseamos determinar si existe una solución débil de la ecuación (2.1). Para esto procederemos a aplicar las siguientes técnicas :

(1) Mediante Cambio de Variable

(2) Mediante la Minimización de un Funcional

(3) Mediante el Teorema del Punto Fijo de Schauder

Veremos que la existencia de la solución débil de (2.1), se obtiene al aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder y las otras dos técnicas fallan para esta ecuación

2.2. Mediante Cambio de Variable

Se presentan dos casos :

Caso 1: Si a no depende de x, definimos

$$A(s) = \int_0^s a(t)dt \ \text{ y } \ v = A(u)$$

de la igualdad

$$v = A(u)$$

obtenemos

$$\nabla v = A'(u)\nabla u = a(u)\nabla u$$

reemplazando en (2.1)

$$-div(a(u)\nabla u) = f$$

$$-div(\nabla v) = f$$

$$-\Delta v = f$$

luego u es solución de (2.1) si y solo si v es solución de

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{en} \quad \Omega \\ \quad v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad (Problema\, de Dirichlet)$$

Es decir en este caso (2.1) se convierte en un problema de Dirichlet el cual tiene solución única. En efecto , $v \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema de Dirichlet si satisface

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w = \int_\Omega fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

a partir de esta igualdad, definimos

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longrightarrow B(v, w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w$$

De la definición es inmediato ver que B es bilineal , probemos que B es continua y coerciva

(1) Por Cauchy$-$Schwartz, obtenemos

$$|B(v, w)| \leq \int_\Omega |\nabla v \cdot \nabla w| \leq C\|v\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, B es continua

(2) Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré

$$|B(v, v)| = \int_\Omega |\nabla v|^2 \geq C\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, B es coerciva

Por lo tanto por el Teorema de Lax -Milgram , existe un único $v \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema de Dirichlet, para probar que esta solución determina una solución de (2.1), procedemos del siguiente modo , de

$$A(s) = \int_0^s a(t)dt$$

obtenemos

$$A'(s) = a(s) \geq \alpha > 0$$

Por lo tanto A es estrictamente creciente , entonces tiene inversa , y ya que

$$v = A(u) \longleftrightarrow u = A^{-1}(v)$$

u es solución de (2.1).

Caso 2: Si a depende de x, definimos

$$v(x) = \int_0^{u(x)} a(x,t)dt$$

de donde obtenemos

$$\nabla v = a(x,u(x))\nabla u + \int_0^{u(x)} \nabla a(x,t)dt$$

observamos que es necesario que $a \in C^1(\Omega)$ situación que no se tiene en general. Por lo cual en este caso no obtenemos la solución buscada. Ahora apliquemos la técnica de minimización de un funcional

2.3. Mediante Minimización de un Funcional

En este caso consideramos el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,v)|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv\,,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

la idea es aplicar el Teorema 1.7, para esto verifiquemos que el funcional J es coerciva y débilmente semicontinua inferior

(1) J es coerciva

Como $a(x,s) \geq \alpha > 0$ tenemos

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,v)|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv \geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$$

aplicando la desigualdad de Holder

$$\geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \|f\|_{L^{2*}}\|v\|_{L^{2^*}}$$

$$\geq \frac{\alpha C}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|f\|_{L^{2*}}\|v\|_{L^{2^*}}$$

por Corolario (1.37.2) parte (1)

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{\alpha C}{2}\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|f\|_{L^{2*}} S_2 \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&= \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} \{ \frac{\alpha C}{2} - \frac{S_2 \|f\|_{L^{2*}}}{\|v\|_{H^1_0(\Omega)}} \}
\end{aligned}
$$

de donde , si $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ obtenemos $J \longrightarrow +\infty$

por lo tanto J es coerciva.

(2) J es débilmente semicontinua inferior en $H^1_0(\Omega)$

Para esto consideremos una sucesión (v_n) de funciones débilmente convergente a alguna función $v \in H^1_0(\Omega)$, es decir

$$v_n \rightharpoonup v \text{ en } H^1_0(\Omega)$$

entonces

$$v_n \rightharpoonup v \text{ en } L^{2^*}(\Omega)$$

y como $f \in L^{2*}(\Omega) = (L^{2^*}(\Omega))'$

$$\langle f, v_n \rangle \longrightarrow \langle f, v \rangle$$

es decir

$$\int_\Omega f v_n \longrightarrow \int_\Omega f v$$

luego

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f v_n = \int_\Omega f v$$

como

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega a(x, v) |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v$$

entonces la semicontinuidad débil inferior de J depende de la semicontinuidad débil inferior de

$$K(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega a(x, v) |\nabla v|^2$$

probemos que K es débilmente semicontinua inferior

Sea $(u_\nu) \subseteq H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } H_0^1(\Omega)$$

como la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta , existe una subsucesión que lo denotaremos igual (u_ν) tal que

$$u_\nu(x) \longrightarrow u(x) \text{ c.t.p en } \Omega$$

como a es continua se tiene

$$a(x, u_\nu(x)) \longrightarrow a(x, u(x)) \text{ c.t.p en } \Omega$$

por lo cual

$$\frac{1}{2}a(x, u_\nu(x))|\nabla u_\nu|^2 \longrightarrow \frac{1}{2}a(x, u(x))|\nabla u|^2 \text{ c.t.p en}\Omega \tag{2.2}$$

además

$$\frac{1}{2}a(x, u_\nu(x))|\nabla u_\nu|^2 \leq \frac{\beta}{2}|\nabla u_\nu|^2 \tag{2.3}$$

de (2.2),(2.3) y el teorema generalizado de la convergencia dominada obtenemos

$$\lim_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \frac{1}{2}a(x, u_\nu(x))|\nabla u_\nu(x)|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x, u(x))|\nabla u(x)|^2 \tag{2.4}$$

es decir

$$\liminf_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \frac{1}{2}a(x, u_\nu(x))|\nabla u_\nu(x)|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x, u(x))|\nabla u(x)|^2$$

por otro lado luego de desarrollar

$$0 \leq \int_\Omega (\nabla u_\nu - \nabla u) \cdot (\nabla u_\nu - \nabla u)$$

multiplicando por $a(x, u) \geq 0$ tenemos

$$0 \leq \int_\Omega a(x, u_\nu)|\nabla u_\nu|^2 dx - 2\int_\Omega a(x, u_\nu)\nabla u_\nu \cdot \nabla u dx + \int_\Omega a(x, u_\nu)|\nabla u|^2 dx \tag{2.5}$$

Por (2.4) y (2.5) obtenemos

$$\liminf_{\nu \longrightarrow +\infty} \int_\Omega \frac{1}{2}a(x, u_\nu(x))|\nabla u_\nu(x)|^2 \geq \frac{1}{2}\int_\Omega a(x, u(x))|\nabla u(x)|^2$$

$$\liminf_{\nu \longrightarrow +\infty} K(u_\nu) \geq K(u)$$

Con lo cual se tiene que K es débilmente semicontinua inferior.

Por lo tanto el funcional J es coerciva y débilmente semicontinua inferior , y aplicando el Teorema (1.7) existe una función $u \in H_0^1(\Omega)$ donde J tiene un valor mínimo . Es decir

$$J(u) \leq J(u+tv),\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Determinemos la ecuación asociada a J, de la definición del funcional tenemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^2 - \int_\Omega fu \leq \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,u+tv)|\nabla(u+tv)|^2 - \int_\Omega f(u+tv)$$

simplificando y desarrollando

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,u+tv)\{|\nabla u|^2 + 2t\nabla u\cdot\nabla v + t^2|\nabla v|^2\} - \int_\Omega ftv$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \{a(x,u+tv)-a(x,u)\}|\nabla u|^2 + t\int_\Omega a(x,u+tv)\nabla u\cdot\nabla v \\ +\frac{t^2}{2}\int_\Omega a(x,u+tv)|\nabla v|^2 - t\int_\Omega fv \end{aligned}$$

dividiendo por $t>0$

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\{a(x,u+tv)-a(x,u)\}}{tv}|\nabla u|^2 v + \int_\Omega a(x,u+tv)\nabla u\cdot\nabla v$$

$$+\frac{t}{2}\int_\Omega a(x,u+tv)|\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$$

si $t \longrightarrow 0$ y teniendo en cuenta que a es continua obtenemos

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega a'(x,u)|\nabla u|^2 v + \int_\Omega a(x,u)\nabla u\cdot\nabla v - \int_\Omega fv$$

En forma similar dividiendo por $t<0$ y que $t \longrightarrow 0$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a'(x,u)|\nabla u|^2 v + \int_\Omega a(x,u)\nabla u\cdot\nabla v - \int_\Omega fv \leq 0$$

por lo tanto obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a'(x,u)|\nabla u|^2 v + \int_\Omega a(x,u)\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega fv,\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

para u , función donde J tiene mínimo.

Observaciones

1. Como la función a es solo continua , a' puede no existir , esto se puede superar considerando $a \in C^1(\Omega)$

2. Para que la integral $\displaystyle\int_\Omega a'(x,u)|\nabla u|^2 v$ este bien definido , podemos considerar que $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^{+\infty}(\Omega)$ y que a' es acotada.

3. Con estas consideraciones cualquier función u mínimo de J que satisface

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a'(x,u)|\nabla u|^2 v + \int_\Omega a(x,u)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv, \; \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

   es solución débil de la ecuación

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) + \frac{1}{2}a'(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{en} \quad \Omega \\ \hfill u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}.$$

lamentablemente esta ecuación no es el problema (2.1).
Como las tecnicas de Cambio de Variable y Minimización de un Funcional no nos conducen al resultado deseado, para resolver el problema de existencia de solución débil para el problema (2.1), aplicaremos el Teorema del Punto Fijo de Schauder. Previamente probaremos caso particular del problema (2.1), fijando la función v logramos que el problema, se vuelva lineal,luego aplicando el Teorema de Lax -Milgram, para cada v fijo, probaremos que existe una solución u, y de este modo podemos definir una aplicación $S : v \longrightarrow u$, que resulta compacto y cumple las hipótesis del Teorema Del punto fijo de Schauder y concluir de este modo que para el problema (2.1) existe solución.

2.4. Mediante el Teorema del punto fijo de Schauder

Comenzamos probando un caso particula de la ecuación (2.1)

Lema 2.1. *Sea* $a : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua , tal que*

$$\alpha \leq a(x,s) \leq \beta, \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, \; 0 < \alpha \leq \beta \quad \textit{en}\, \mathbb{R}$$

Si $f \in L^{2_*}(\Omega)$ *, y* $v \in L^2(\Omega)$ *fijo, entonces existe una única solución débil* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de*

$$\begin{cases} -div(a(x,v)\nabla u) = f & \textit{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

Demostración. .

1. Formulación débil de (2.7)

   Multiplicamos la primera igualdad de (2.7) por una función regular w

   $$-div(a(x,v)\nabla u)w = fw$$

   como

   $$div(a(x,v)\nabla u\, w) = div(a(x,u)\nabla u)w + a(x,u)\nabla u \cdot \nabla w$$

   entonces

   $$a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w - div(a(x,v)\nabla u\, w) = fw$$

   integrando sobre Ω

   $$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w - \int_\Omega div(a(x,v)\nabla u\, w) = \int_\Omega fw$$

   por teorema de la divergencia

   $$\int_\Omega div(a(x,v)\nabla u\, w) = \int_{\partial\Omega} a(x,v)\nabla u \cdot \nu\, w$$

   obtenemos

   $$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} a(x,v)\nabla u \cdot \nu\, w = \int_\Omega fw$$

   considerando $w \in H_0^1(\Omega)$ obtenemos la formulación débil de (2.7)

   $$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w = \int_\Omega fw$$

2. Dado que $\alpha \leq a(x,s) \leq \beta, \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$, la función a es acotada y pertenece a $L^{+\infty}(\Omega)$, además para $u, w \in H_0^1(\Omega)$ la integral

$$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w$$

está bien definida. Por lo tanto determinar una solución débil de (2.7) es hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w = \int_\Omega fw, \ \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{2.8}$$

para hallar la solución débil de (2.8) aplicaremos el Teorema de Lax- Milgram Con este objetivo para cada $v \in L^2(\Omega)$ fijo definimos

$$\begin{aligned} a_v : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,w) \quad &\longrightarrow a_v(u,w) = \int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w \end{aligned}$$

Probemos que la aplicación a_v satisface las hipótesis del Teorema de Lax - Milgram

(1) a_v es bilineal : Esto es inmediato de la definición de la aplicación a_v

(2) a_v es continua: En efecto, por la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned} |a_v(u,w)| &= |\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w| \\ &\leq \beta \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla w| \\ &\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

esto prueba la continuidad de a_v

(3) a_v es coerciva:

Aplicando el Teorema 1.36 la Desigualdad de Poincaré.

$$\begin{aligned} |a_v(u,u)| &= |\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla u| \\ &\geq \alpha|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u| \\ &= \alpha\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

En conclusión a_v satisface las hipótesis del Teorema de Lax -Milgram, entonces (2.7) tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ para cada $v \in L^2(\Omega)$ fijo.

□

Probemos ahora el teorema central de este capítulo

Teorema 2.1. *Sea* $a : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua , tal que*

$$\alpha \leq a(x,s) \leq \beta, \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq \beta \textit{ en } \mathbb{R}$$

y una función $f \in L^{2_*}(\Omega)$ *, entonces existe una solución* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de (2.1)*

$$\begin{cases} -div(a(x,u)\nabla u) = f & \textit{en} \quad \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Demostración. .

Por Lema (2.1) para cada $v \in L^2(\Omega)$ fijo, ya que a es acotado y estrictamente positivo existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (2.7). De este modo podemos definir la función

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$
$$v \longrightarrow S(v) = u$$

además ya que $H_0^1(\Omega)$ está inmerso en $L^2(\Omega)$, podemos considerar que S es una función de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$v \longrightarrow S(v) = u$$

observamos que la solución de (2.1) es un punto fijo para S, ya que si $v = u$, como $S(v) = u$ obtenemos

$$S(u) = u.$$

Probaremos la existencia de un punto fijo de S, aplicando el Teorema del punto fijo de Schauder. Como

$$div(a(x,v)\nabla u\varphi) = div(a(x,v)\nabla u)\varphi + a(x,v)\nabla u \cdot \nabla\varphi$$

despejando

$$-div(a(x,v)\nabla u)\varphi = a(x,v)\nabla u \cdot \nabla\varphi - div(a(x,v)\nabla u\varphi)$$

integramos

$$\int_\Omega -div(a(x,v)\nabla u)\varphi = \int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla\varphi - \int_\Omega div(a(x,v)\nabla u\,\varphi)$$

por Teorema de la divergencia

$$\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} a(x,v)\nabla u \cdot \nu\varphi$$

considerando $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ obtenemos

$$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\,\varphi\,, \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.9}$$

en particular si $\varphi = u = S(v)$

$$\int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega f\,u$$

$$\int_\Omega a(x,v)|\nabla u|^2 = \int_\Omega f\,u$$

teniendo en cuenta que $\alpha \leq a(x,s) \leq \beta$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega a(x,v)|\nabla u|^2 = \int_\Omega f\,u$$

por la desigualdad de Holder

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega f\,u \leq \|f\|_{L^{2*}(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

luego por (1.37.2) corolario de la desigualdad de Sobolev y luego la equivalencia de normas

$$\alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq S_2\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1S_2\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\alpha\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1S_2\|f\|_{L^{2*}(\Omega)} \tag{2.10}$$

aplicando la desigualdad de Poincaré $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ con Ω acotado

$$\alpha\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\alpha}{C}\|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.11}$$

considerando (2.11) en (2.10) obtenemos para $C' = CC_1S_2$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C'}{\alpha}\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}$$

de aquí, si $R = \dfrac{C'}{\alpha}\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R \tag{2.12}$$

es decir, existe $R > 0$ tal que

$$\|S(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq R, \, \forall v \in L^2(\Omega)$$

ahora consideremos la bola

$$B_R(0) = \{u \in L^2(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R\}$$

la cual es convexa,cerrada y acotada en $L^2(\Omega)$ y además por la última desigualdad obtenida se tiene que $S(B_R(0)) \subset B_R(0)$.

(1) Probemos que S es continua:
Sea (v_n) una sucesión que converge fuerte a v en $L^2(\Omega)$. En la desigualdad (2.10)obtenida anteriormente

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega a(x,v)|\nabla u|^2 = \int_\Omega f\, u \leq S_2\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

consideremos $u_n = S(v_n)$ solución de (2.9), notemos que por el lema (2.1) $u_n \in H_0^1(\Omega)$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq S_2\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

y por (2.12)

$$\alpha\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq RS_2\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}$$

aplicando teorema 1.36 de Poincaré , obtenemos

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq K\|f\|_{L^{2*}(\Omega)}$$

por lo tanto (u_n) es acotada en $H_0^1(\Omega)$, y como $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo , existe una subsucesión de (u_n) que lo denotaremos igual por u_n, que converge débil a algún $u_\infty \in H_0^1(\Omega)$, esto es

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ en } H_0^1(\Omega), \qquad u_n \longrightarrow u_\infty \text{ en } L^2(\Omega)$$

además , salvo una subsucesión podemos asumir en casi todo punto $x \in \Omega$

$$v_n \longrightarrow v$$

esto implica que

$$a(x, v_n) \longrightarrow a(x, v) \text{ c.t.p } x \in \Omega$$

por teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$a(x, v_n)\nabla\varphi \longrightarrow a(x, v_n)\nabla\varphi \text{ en } L^2(\Omega)$$

estamos en condiciones de tomar límite en la ecuación

$$\int_\Omega a(x, v_n)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\,\varphi\,, \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.13}$$

ya que $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u_\infty$ en $L^2(\Omega)$, obtenemos por (2.13)

$$\int_\Omega a(x, v)\nabla u_\infty \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\,\varphi \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

es decir $u_\infty = u = S(v)$, u es solución de (2.9). Ya que el posible límite de la sucesión u_n está determinado de manera única , la sucesión u_n converge hacia u en $L^2(\Omega)$.

$$u_n = S(v_n) \longrightarrow u = S(v) \text{ en } L^2(\Omega)$$

concluimos que S es continua.

(2) Probemos que $\overline{S(B_R(0))}$ es compacto
Por (2.12) tenemos que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R$$

y como

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

entonces la desigualdad vale para

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

es decir

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$$

por lo tanto

$$\|S(v)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R$$

Esto significa que $S(B_R(0)) \subset B_R(0)$ y por el teorema 1.39 de Rellich-Kondrachov $H_0^1(\Omega)$ tiene inmersión compacta en $L^2(\Omega)$, entonces la clausura de $S(B_R(0))$ es compacto en $B_R(0)$. por lo tanto por el Teorema del Punto Fijo de Schauder , existe al menos una solución u del problema (2.1). $\square$

Capítulo 3

Existencia de Solución Débil para una Ecuación Elíptica Anisotrópica

En esta sección estudiaremos la existencia de soluciones para el problema

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}(a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u) + b(x,u) = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Para ello aplicaremos el Teorema del Punto Fijo de Schauder , diremos que una función $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ es solución débil para la ecuación (3.1), si u satisface

$$\int_\Omega a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}v + b(x,u)v = \langle f, v\rangle, \forall v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \tag{3.2}$$

3.1. Consideraciones Generales

1. Las componentes del vector constante $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$ satisfacen

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n < \infty \tag{3.3}$$

Definición 3.1. *Definimos el espacio*

$$W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) = \{u \in W_0^{1,p_1}(\Omega) : \partial_{x_i}u \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, 2, ..., n\}$$

y dotamos a este espacio con la norma

$$\|u\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

Definición 3.2. *Por* $W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)$ *denotaremos el espacio dual de* $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$

2. Las funciones

$$a_i, b : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.4}$$

son funciones de Carathéodory , esto significa que :

   (a) Para cada fijo $u \in \mathbb{R}$, $a_i(.,u)$ y $x \longrightarrow b(.,u)$ son funciones medibles en Ω

   (b) Para c.t.p fijo $x \in \Omega$, $a_i(x,.)$ y $b(x,.)$ de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas

3. Además consideramos

$$0 < \lambda \leq \lambda_i \leq a_i(x,u) \leq \Lambda < \infty, \forall i, c.t.p\ x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

$$|b(x,u)| \leq C_0|u|^{\beta-1} + h(x),\ \ 0 \leq h(x) \in L^{\frac{\beta}{\beta-1}}(\Omega), 1 \leq \beta \leq p_n \tag{3.6}$$

$$b \text{ es una función no decreciente} \tag{3.7}$$

$$f(x) \ \ \in \ \ W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega) \tag{3.8}$$

4. También

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1 \tag{3.9}$$

$$p^* = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} - 1} \tag{3.10}$$

$$p_\infty = max\{p_n, p^*\} = p^* \tag{3.11}$$

3.2. Teorema de Browder-Minty

Definición 3.3. *Sea X un espacio de Banach*

(a) Un operador $T : X \longrightarrow X'$ es monótono si satisface

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0, \text{ para todo } u, v \in X$$

(b) Un operador $T : X \longrightarrow X'$ es coercivo si satisface

$$\lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$$

Teorema 3.1. ***(Teorema de Browder-Minty)***
Sean X un espacio de Banach reflexivo y $T : X \longrightarrow X'$ un operador continuo , monótono y coercivo, entonces T es suryectivo.

Demostración. Ver[4] Teorema (7.2.3). □

3.3. Teorema de Existencia

Teorema 3.2. *Bajo las condiciones (3.3)– (3.8) el problema (3.1) tiene al menos una solución débil $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$*

Demostración. Como en el teorema (2.1) , comenzamos fijando $v(x)$ una función cualquiera tal que $v(x) \in L^{p_n}(\Omega)$ y definimos las funciones A_i por

$$A_i(x) = a_i(x, v(x)), \forall i$$

y consideramos el operador $T : W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)$

$$\langle Tu, \varphi\rangle = \int_\Omega A_i(x)|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u\partial_{x_i}\varphi + b(x, u)\varphi \tag{3.12}$$

Probemos que el operador $T : W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \longrightarrow W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)$ es continua, monótona y coerciva

(1) T es continua
Sean $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tal que $u_k \longrightarrow u$ en $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$
de la definicíon del espacio $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tenemos

$$u_k \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \text{ y } u \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$$
$$\partial_{x_i} u_k \in L^{p_i}(\Omega) \text{ y } \partial_{x_i} u \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, 2, ..., n$$

ya que $u_k \longrightarrow u$ se tiene

$$|\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k \longrightarrow |\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u \text{ en } L^{p'_i}(\Omega) \tag{3.13}$$

además como b es función de Carathéodory

$$b(x, u_k(x)) \longrightarrow b(x, u(x)) \tag{3.14}$$

de

$$\langle Tu_k, \varphi\rangle = \int_\Omega A_i(x)|\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k \partial_{x_i}\varphi + b(x, u_k)\varphi$$
$$\langle Tu, \varphi\rangle = \int_\Omega A_i(x)|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u \partial_{x_i}\varphi + b(x, u)\varphi$$

obtenemos

$$|\langle Tu_k, \varphi\rangle - \langle Tu, \varphi\rangle| = |\int_\Omega A_i(x)\{|\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k - |\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u\}\partial_{x_i}\varphi$$
$$+ \int_\Omega \{b(x, u_k) - b(x, u)\}\varphi|$$

por (3.5)

$$\leq \Lambda \int_\Omega ||\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k - |\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u||\partial_{x_i}\varphi|$$
$$+ \int_\Omega |b(x, u_k) - b(x, u)||\varphi|$$

aplicando la desigualdad de Holder obtenemos

$$\leq \Lambda(\int_\Omega |\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k - |\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u|^{p'_i})^{\frac{1}{p'_i}}(\int_\Omega |\partial_{x_i}\varphi|^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}$$
$$+ \int_\Omega |b(x, u_k) - b(x, u)||\varphi|$$
$$= \Lambda \||\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k - |\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k\|_{L^{p'_i}(\Omega)}\|\partial_{x_i}\varphi\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$
$$+ \|b(x, u_k) - b(x, u)\|_{L^{p'_1}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p_1}(\Omega)}$$
$$\leq \Lambda \||\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k - |\partial_{x_i} u_k|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_k\|_{L^{p'_i}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)}$$
$$+ \|b(x, u_k) - b(x, u)\|_{L^{p'_1}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)}$$

de aqui por (3.10) y (3.11), si $k \longrightarrow \infty$ ambos sumandos tienden a cero y ya que

$$\|Tu_k - Tu\|_{W_0^{-1,\vec{p}\,'}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \langle Tu_k - Tu, \varphi\rangle \longrightarrow 0$$

concluimos que T es continua.

(2) T es monótona

Debemos mostrar que para $u, w \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ se tiene

$$\langle Tu - Tw, u - w\rangle \geq 0$$

En efecto

$$\begin{aligned}\langle Tu - Tw, u - w\rangle = &\int_\Omega A_i(x)\{|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u - |\partial_{x_i}w|^{p_i-2}\partial_{x_i}w\}(\partial_{x_i}u - \partial_{x_i}w)\\ &+ \int_\Omega (b(x,u) - b(x,w))(u - w)\end{aligned}$$

entonces efectuando

$$\begin{aligned}&= \int_\Omega A_i(x)\{|\partial_{x_i}u|^{p_i} - |\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}w\partial_{x_i}u - |\partial_{x_i}w|^{p_i-2}\partial_{x_i}w\partial_{x_i}u + |\partial_{x_i}w|^{p_i}\}\\ &+ \int_\Omega (b(x,u) - b(x,w))(u - w)\end{aligned}$$

por (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned}&\geq \lambda_i \int_\Omega \{|\partial_{x_i}u|^{p_i} - |\partial_{x_i}u|^{p_i-1}|\partial_{x_i}w| - |\partial_{x_i}w|^{p_i-1}|\partial_{x_i}u| + |\partial_{x_i}w|^{p_i}\}\\ &+ \int_\Omega (b(x,u) - b(x,w))(u - w)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}&= \lambda_i \int_\Omega \{|\partial_{x_i}u|^{p_i-1} - |\partial_{x_i}w|^{p_i-1}\}(|\partial_{x_i}u| - |\partial_{x_i}w|)\\ &+ \int_\Omega (b(x,u) - b(x,w))(u - w)\end{aligned}$$

de (3.7) y como el primer sumando es no negativo , obtenemos

$$\langle Tu - Tw, u - w\rangle \geq 0$$

por lo tanto T es Monótona.

(3) T es coerciva

como

$$\langle Tu,u\rangle = \int_\Omega A_i(x)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}u + b(x,u)u = \int_\Omega A_i(x)|\partial_{x_i}u|^{p_i} + b(x,u)u$$

usando (3.5) y multiplicando (3.6) por $|u|$ y despejando $b(x,u)u$ obtenemos

$$\langle Tu,u\rangle \geq \lambda\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i} - \int_\Omega (C_0|u|^\beta + h|u|) \tag{3.15}$$

aplicando 1.24 la desigualdad de Young parte (b)

$$\int_\Omega (C_0|u|^\beta + h|u|) \leq \int_\Omega (C_0|u|^\beta + \delta|u|^p + \frac{(p\delta)^{-\frac{p'}{p}}}{p'}h^{p'})$$

tomando $\delta = \frac{1}{p}$, $p = \beta$, $p' = \frac{\beta}{\beta-1}$ y C_1 como el máximo de los coeficientes obtenemos

$$\leq C_1\int_\Omega (|u|^\beta + h^{\frac{\beta}{\beta-1}})$$

aplicando 1.25 la desigualdad de Holder con $p = \dfrac{p_n}{\beta},\ p' = \dfrac{p_n}{p_n-\beta}$ y considerando nuevamente una constante conveniente como antes obtenemos

$$\leq C_2((\int_\Omega |u|^{p_n})^{\frac{\beta}{p_n}} + \int_\Omega h^{\frac{\beta}{\beta-1}})$$

aplicando 1.36 la desigualdad de Poincaré

$$\leq C_3((\int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_n})^{\frac{\beta}{p_n}} + \int_\Omega h^{\frac{\beta}{\beta-1}})$$

aplicando nuevamente 1.24 la desigualdad de Young parte (b) con $p = \frac{p_n}{\beta}$ y $p' = \frac{p_n}{p_n-\beta}$

$$\leq \delta\int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_n} + C_4\{1 + \int_\Omega h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$$

es decir

$$\int_\Omega (C_0|u|^\beta + h|u|) \leq \delta\int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_n} + C_4\{1 + \int_\Omega h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\} \tag{3.16}$$

combinando (3.12) y (3.13) con $\lambda = 2\delta$ obtenemos

$$\langle Tu,u\rangle \geq \lambda\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\partial_{x_i}u|^{p_i} - C_4\{1 + \int_\Omega h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle Tu,u\rangle &\geq \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|\partial_{x_i}u|^{p_i} - C\{1+\int_{\Omega}h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}\\ &= \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}}^{p_i} - C\{1+\int_{\Omega}h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

ahora considerando

$$\|\partial_{x_k}u\|_{L^{p_k}} = \text{máx}\{\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}} : i = 1,2,3,...,n\}$$

$$\|\partial_{x_j}u\|_{L^{p_j}}^{p_j} = \text{máx}\{\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}}^{p_i} : i = 1,2,3,...,n\}$$

tenemos que

$$\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}} \leq \|\partial_{x_k}u\|_{L^{p_k}} \leq \|u\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}} \leq n\|\partial_{x_k}u\|_{L^{p_k}} \leq n\|\partial_{x_j}u\|_{L^{p_j}}^{p_j/p_k}$$

por lo cual obtenemos

$$\|\partial_{x_j}u\|_{L^{p_j}}^{p_j} \geq \frac{1}{n^{p_k}}\|u\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}}^{p_k}$$

considerando esta desigualdad en (3.14) obtenemos

$$\langle Tu,u\rangle \geq \frac{\lambda}{2n^{p_k}}\|u\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}}^{p_k} - C\{1+\int_{\Omega}h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$$

por lo tanto T es coerciva. Entonces T es monótona, continua , coerciva y como el espacio $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ es reflexivo por el teorema de Browder-Minty , la ecuación

$$Tu = f \tag{3.18}$$

tiene al menos una solución débil $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ para todo $f \in W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)$
por lo tanto podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned}\Phi : L^{p_n}(\Omega) &\longrightarrow L^{p_n}(\Omega)\\ v &\longrightarrow \Phi(v) = u\end{aligned}$$

además , si u es solución de (3.18) por (3.14) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} &\leq C\{1+\int_{\Omega}h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\} + \langle f,u\rangle\\ &\leq C\{1+\int_{\Omega}h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\} + \|f\|_{W_0^{-1,\overrightarrow{p}'}(\Omega)}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}(\Omega)}\end{aligned}$$

como

$$\|f\|_{W_0^{-1,\vec{p}\,'}(\Omega)}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}(\Omega)}=\|f\|_{W_0^{-1,\vec{p}\,'}(\Omega)}(\|\partial_{x_1}u\|_{L^{p_1}(\Omega)}+...+\|\partial_{x_n}u\|_{L^{p_n}(\Omega)})$$

aplicamos la desigualdad de Young para cada sumando

$$\leq C\{1+\int_{\Omega}h^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}+\delta\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} \\ +\frac{(p_i\delta)^{-\frac{p_i'}{p_i}}}{p_i'}\|f\|^{p_i'}_{W_0^{-1,\vec{p}\,'}(\Omega)} \tag{3.19}$$

tomando $\delta=\frac{\lambda}{4}$ deducimos que si u es solución para (3.18)

$$\frac{\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}\leq C(h,f)$$

entonces obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}u\|_{L^{p_i}(\Omega)}\leq C(\lambda,h,f)$$

debido a la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_{L^{p_n}(\Omega)}\leq C_1\|\partial_{x_n}u\|_{L^{p_n}(\Omega)}$$

obtenemos para alguna nueva constante

$$\|u\|_{L^{p_n}(\Omega)}\leq C'(\lambda,h,f)=R \tag{3.20}$$

Sea

$$B_R(0)=\{u\in L^{p_n}(\Omega):\|u\|_{L^{p_n}(\Omega)}\leq R)\}$$

probemos que Φ es continua y compacto

(1) Φ es continua

Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge fuerte a v en $L^{p_n}(\Omega)$ y $u_n=\Phi(v_n)$ solución de (3.15). Aplicamos la estimativa obtenida en (3.17) a u_n , ya que es independiente de v, por lo cual tenemos

$$\|u_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}\leq C'(\lambda,h,f)=R$$

luego (u_n) es una sucesión acotada en $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ independiente de n, entonces existe una subsucesión que lo denotaremos igual por (u_n) , que converge débil a u en $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ es decir

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$$

es decir

$$\Phi(v_n) \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$$

podemos asumir, si es necesario para una subsucesión en c.t.p $x \in \Omega$

$$v_n \longrightarrow v$$

como a_i es Carathéodory tenemos

$$a_i(x, v_n) \longrightarrow a_i(x, v) \text{ c.t.p en } \ \Omega$$

y por el Teorema de la convergencia dominada

$$|\partial_{x_i} u_n|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_n \longrightarrow |\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u \text{ en } \ L^{p_i'}(\Omega)$$

en (3.15) consideramos la subsucesión (u_n)

$$\int_\Omega a_i(x, v_n)|\partial_{x_i} u_n|^{p_i-2}\partial_{x_i} u_n \partial_{x_i}\varphi + b(x, u_n)\varphi = \int_\Omega f\varphi, \forall \varphi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \quad (3.21)$$

ya que $|\partial_{x_i} u_n|^{p_i} \longrightarrow |\partial_{x_i} u|^{p_i}$ en $L^{p_i}(\Omega)$, podemos tomar límite , si $n \longrightarrow \infty$, teniendo en cuenta que a_i y b son funciones de Carathéodory obtenemos

$$\int_\Omega a_i(x, v)|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u \partial_{x_i}\varphi + b(x, u)\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \quad (3.22)$$

es decir $u = \Phi(v)$ es solución de (3.15) ,y como no depende de la subsucesión tomada, por unicidad del límite tenemos que

$$\Phi(v_n) = u_n \longrightarrow u = \Phi(v)$$

por lo tanto Φ es continua.

(2) Φ es Compacto

Teniendo en cuenta (3.9),(3.10) ,(3.11)y Teorema (1) de [30] la inmersión de $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ en L^{p_n} es compacta. Por lo tanto por (1.18) Teorema del punto fijo de Schauder , existe al menos una solución débil u del problema (3.1)

□

Capítulo 4

Unicidad de la Solución Débil

4.1. Unicidad Cuando al Menos un $p_i \leq 2$

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}(a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u) = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con borde Lipschitz continuo $\Gamma = \partial\Omega$.
Una solución débil $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ del problema 4.1 es una función u tal que

$$\int_\Omega a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}v = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \tag{4.2}$$

Consideraciones Previas

$$0 < \lambda \leq \lambda_i \leq a_i(x,u) \leq \Lambda < \infty, \forall i, c.t.p\ x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

$$|a_i(x,u) - a_i(x,v)| \leq \omega(|u-v|), \forall i, \text{c.t.p } x \in \Omega, \forall u, v \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

donde

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty \tag{4.5}$$

La demostración de la desigualdad siguiente se puede ver en [8]

$$\gamma|\xi_i - \eta_i|^{2+\sigma}\{|\xi_i| + |\eta|\}^{p_i-2-\sigma} \leq \{|\xi_i|^{p_i-2}\xi_i - |\eta|^{p_i-2}\eta_i\} \cdot (\xi_i - \eta_i) \tag{4.6}$$

vale para $\gamma > 0$, σ constante nonegativa y para cada ξ_i,η_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$

Teorema 4.1. .

Mediante las condiciones (4.3),(4.4), cualquier solución débil $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *para (4.1) o (4.2) es único si al menos un* $p_i \leq 2$

Demostración. Definimos

$$F_\epsilon(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\epsilon^x \frac{ds}{\omega^2(s)} & \text{si} \quad x \geq \epsilon \\ 0 & \text{si} \quad x \leq \epsilon \end{cases} \tag{4.7}$$

sean u, v dos soluciones para (4.2) y consideramos $w = u - v$. Tomamos como función de prueba en (4.2) a $F_\epsilon(w)$ para u, v entonces

$$\int_\Omega a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}F_\epsilon(w) = \int_\Omega fF_\epsilon(w)$$

$$\int_\Omega a_i(x,v)|\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\partial_{x_i}F_\epsilon(w) = \int_\Omega fF_\epsilon(w)$$

de aquí tenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} \{a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u - a_i(x,v)|\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\}\frac{\partial_{x_i}w}{\omega^2} = 0$$

sumando y restando la integral

$$\int_\Omega a_i(x,u)|\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\frac{\partial_{x_i}w}{\omega^2}$$

y agrupando convenientemente obtenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} a_i(x,u)\{|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u - |\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\}\frac{\partial_{x_i}w}{\omega^2}$$

$$= \int_{\Omega_\epsilon} \{a_i(x,v) - a_i(x,u)\}|\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\frac{\partial_{x_i}w}{\omega^2} \tag{4.8}$$

donde $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : w(x) > \epsilon\}$

Utilizando (4.3), (4.4),y (4.6) con

$$\sigma = 0, \;\; \xi_i = \partial_{x_i}u, \;\; \eta_i = \partial_{x_i}v$$

tenemos

$$\xi_i - \eta_i = \partial_{x_i}w$$

en la igualdad (4.8), obtenemos con sumatoria en i, para $\mu = \gamma\lambda$

$$\mu\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i}w}{\omega}|^2(|\partial_{x_i}u| + |\partial_{x_i}v|)^{p_i-2} \leq \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i}v|^{p_i-1}|\frac{\partial_{x_i}w}{\omega}| \tag{4.9}$$

Supongamos que $p_i \geq 2$

Entonces para todo $\delta > 0$ por desigualdad de Young con $p = 2$

$$I_i = \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i - 1} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}| \leq \delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 |\partial_{x_i} v|^{p_i - 2} + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i}$$

$$\leq \delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2}) + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i} \tag{4.10}$$

Supongamos que $p_i \leq 2$

para $\delta > 0$ y por desigualdad de Young con $p = p_i$, obtenemos

$$I_i = \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i - 1} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}| \leq \delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^{p_i} + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i} \tag{4.11}$$

además para cualquier $\delta > 0$,por desigualdad de Young con $p = 2/p_i$

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^{p_i} = \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^{p_i} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{\frac{p_i - 2}{2} p_i} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{-\frac{p_i - 2}{2} p_i}$$

$$\leq \delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2} + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i} \tag{4.12}$$

combinando (4.11) y (4.12) obtenemos una estimativa similar a la obtenida para $p_i \geq 2$

$$I_i \leq \delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2} + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i} \tag{4.13}$$

finalmente obtenemos para cada i y para $\delta > 0$

$$I_i \leq \delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2} + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i} \tag{4.14}$$

teniendo en cuenta (4.9)-(4.13) para un adecuado valor de $\delta > 0$ obtenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2} \leq \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i - 1} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|$$

$$= \frac{1}{\mu} \{\delta \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2} + C(\delta, p_i) \int_{\Omega_\epsilon} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i}\}$$

despejando la integral del lado izquierdo y para alguna constante $C' = C'(\delta, p_i)$ independiente de ϵ

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_i} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i - 2} \leq C \int_{\Omega_\epsilon} (|\partial_{x_i} u| + |\partial_{x_i} v|)^{p_i} \leq C' \tag{4.15}$$

si existe algún p_i, por ejemplo si $p_k < 2$, aplicamos la desigualdad de Holder considerando $p = 2/p_k, p' = 2/(2-p_k)$, y obtenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_k} w}{\omega}|^{p_k} = \int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_k} w}{\omega}|^{p_k} (|\partial_{x_k} u| + |\partial_{x_k} v|)^{\frac{p_k-2}{2}p_k} (|\partial_{x_k} u| + |\partial_{x_k} v|)^{\frac{2-p_k}{2}p_k}$$

$$\leq (\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_k} w}{\omega}|^2 (|\partial_{x_k} u| + |\partial_{x_k} v|)^{p_k-2})^{\frac{p_k}{2}} (\int_{\Omega_\epsilon} (|\partial_{x_k} u| + |\partial_{x_k} v|)^{p_k})^{\frac{2-p_k}{2}} \tag{4.16}$$

por (4.15) y (4.16) deducimos

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\frac{\partial_{x_k} w}{\omega}|^{p_k} \leq (C')^{\frac{p_k}{2}} (C')^{\frac{2-p_k}{2}} = C'$$

consideremos la función G_ϵ definida por

$$G_\epsilon(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\epsilon^x \frac{ds}{\omega(s)} & \text{si} \quad x > \epsilon \\ 0 & \text{si} \quad x \leq \epsilon \end{cases}$$

que satisface

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_k} G_\epsilon(w)|^{p_k} \leq C'$$

aplicando(1.36) la desigualdad de Poincaré

$$\int_{\Omega_\epsilon} |G_\epsilon(w)|^{p_k} \leq C'' \tag{4.17}$$

si el conjunto $\{w = u - v > \epsilon\}$ tiene medida positiva, cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, ya que por (4.5)

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty$$

obtenemos

$$\int_\Omega |G_\epsilon(w)|^{p_k} \longrightarrow \infty$$

que contradice (4.17). Por lo tanto tenemos que $u \leq v$. De manera similar intercambiando u con v obtenemos $v \geq u$, es decir $u = v$, por lo tanto la solución es única $\square$

4.2. Unicidad cuando existe un termino de orden inferior y $p_i > 2, \forall i$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\partial_{x_i}(a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u + b(x,u) = f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{4.18}$$

diremos que $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ es solución débil de (4.18) en el sentido que

$$\int_\Omega a_i(x,u)|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}v + b(x,u)v = \langle f, v\rangle, \forall v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \tag{4.19}$$

Consideraciones Previas

(1) Denotamos por $m(t)$ el modulo de la continuidad uniforme de los $a_i(x,u)$ es decir

$$m(t) = \max_i \sup_{x\in\Omega, |u-v|\leq t} |a_i(x,u) - a_i(x,v)| \tag{4.20}$$

(2) Si las funciones $a_i(x,u)$, son funciones de Carathéodory uniformemente continuos con respecto a x , tenemos

$$m(t) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow 0 \tag{4.21}$$

además $m(t)$ no decreciente en t es decir

$$t_0 < t_1 \longrightarrow m(t_0) \leq m(t_1)$$

(3) Denotaremos por ω la función

$$\omega(t) = \min(m(t), 1)$$

(4) Asumimos que es válido

$$0 < \lambda \leq \lambda_i \leq a_i(x,u) \leq \Lambda < \infty, \forall i \text{ , c.t.p } x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

y ya que $a_i(x,u)$ es acotada , para alguna constante C, tenemos

$$|a_i(x,u) - a_i(x,v)| \leq C\omega(|u-v|) \ \forall i \quad \text{c.t.p } x \in \Omega, \forall u, v \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

(5) Suponemos que existe α tal que

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega^\alpha(s)} = +\infty, \; 1 < \alpha \leq \frac{p_n}{p_n - 1} \leq \frac{p_i}{p_i - 1}, \; \forall i. \tag{4.24}$$

entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que

$$\int_{\delta(\epsilon)}^{\epsilon} \frac{ds}{\omega^\alpha(s)} = 1 \tag{4.25}$$

por lo cual definimos $F_\epsilon(x)$

$$F_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq \delta(\epsilon), \\ \displaystyle\int_{\delta(\epsilon)}^{x} \frac{ds}{\omega^\alpha(s)} & \text{si} \quad \delta(\epsilon) \leq x \leq \epsilon, \\ 1 & \text{si} \quad \epsilon \leq x. \end{cases} \tag{4.26}$$

claramente esta función es Lipschitz continua, ya que tiene derivada acotada.

(6) Asumimos también que

$$u \longrightarrow b(x, u) \quad \text{es creciente} \tag{4.27}$$

Teorema 4.2. *Mediante las consideraciones indicadas en (4.22), (4.23),(4.24),(4.28) la solución débil $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ para (4.19) es única.*

Demostración. Sean u, v soluciones para (4.18). Considerando $w = u - v$, tomamos $F_\epsilon(w)$ como función de prueba en (4.19)

$$\int_\Omega a_i(x,u)|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u \partial_{x_i} F_\epsilon(w) + b(x,u)F_\epsilon(w) = \langle f, F_\epsilon(w)\rangle$$

$$\int_\Omega a_i(x,v)|\partial_{x_i} v|^{p_i-2}\partial_{x_i} v \partial_{x_i} F_\epsilon(w) + b(x,v)F_\epsilon(w) = \langle f, F_\epsilon(w)\rangle \tag{4.28}$$

de aquí obtenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} \{a_i(x,u)|\partial_{x_i} u|^{p_i-2}\partial_{x_i} u - a_i(x,v)|\partial_{x_i} v|^{p_i-2}\partial_{x_i} v\}\partial_{x_i} F_\epsilon(w)$$
$$+ \int_\Omega \{b(x,u) - b(x,v)\}F_\epsilon(w) = 0 \tag{4.29}$$

como

$$\partial_{x_i} F_\epsilon(w) = \partial_{x_i} w F'_\epsilon(w)$$

además considerando

$$\int_{\Omega_\epsilon} a_i(x,u)|\partial_{x_i} v|^{p_i-2}\partial_{x_i} v \partial_{x_i} w F'_\epsilon(w)$$

en (3.50) y luego agrupando adecuadamente obtenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} a_i(x,u)\{|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u - |\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\}\partial_{x_i}wF'_\epsilon(w) + \int_\Omega \{b(x,u)-b(x,v)\}F_\epsilon(w)$$
$$= \int_{\Omega_\epsilon} \{a_i(x,v)-a_i(x,u)\}|\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\partial_{x_i}wF'_\epsilon(w)$$

la integración en la integral conteniendo $F'_\epsilon(w)$ se toma solo sobre el conjunto

$$\Omega_\epsilon = \{x : \delta(\epsilon) < w(x) < \epsilon\} \tag{4.30}$$

acotemos la primera integral del lado izquierdo

(1) Considerando en la desigualdad (4.6)

$$\sigma = 0,\ \xi_i = \partial_{x_i}u,\ \eta_i = \partial_{x_i}v$$

(2) Como $w = u - v$ tenemos que se cumple

$$|\partial_{x_i}w|^{p_i-2} \leq (|\partial_{x_i}u| + |\partial_{x_i}v|)^{p_i-2}$$

(3) De la definición se tiene

$$F'_\epsilon(w) = \frac{1}{\omega^\alpha}$$

luego por (1),(2) y (3) tenemos

$$\int_{\Omega_\epsilon} a_i(x,u)\{|\partial_{x_i}u|^{p_i-2}\partial_{x_i}u - |\partial_{x_i}v|^{p_i-2}\partial_{x_i}v\}\partial_{x_i}wF'_\epsilon(w)$$
$$\geq \int_{\Omega_\epsilon} \lambda|\partial_{x_i}w|^2|\partial_{x_i}w|^{p_i-2}\frac{1}{\omega^\alpha} = \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\lambda|\partial_{x_i}w|^{p_i}}{\omega^\alpha}$$

volviendo a la igualdad , usando (4.22),(4.23) y procediendo de manera similar que en el caso de unicidad anterior, obtenemos para alguna constante $\mu > 0$ en el primer sumando del lado izquierdo

$$\mu\sum_i \int_{\Omega_\epsilon} \frac{|\partial_{x_i w}|^{p_i}}{\omega^\alpha}dx + \int_\Omega \{b(x,u)-b(x,v)\}F_\epsilon(w)$$
$$\leq \sum_i \int_{\Omega_\epsilon} |a_i(x,v)-a_i(x,u)|\partial_{x_i}v|^{p_i-1}\frac{|\partial_{x_i}w|}{\omega^\alpha}$$
$$\leq C\sum_i \int_{\Omega_\epsilon} \frac{|\partial_{x_i}w|}{\omega^{(\alpha-1)}}|\partial_{x_i}v|^{p_i-1}.$$

usando la desigualdad de Young con $p = p_i$ en el lado derecho obtenemos

$$\leq \delta \sum_i \int_{\Omega_\epsilon} \frac{|\partial_{x_i} w|^{p_i}}{\omega^{(\alpha-1)p_i}} + C \sum_i \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i}. \tag{4.31}$$

para cualquier $\delta > 0$ y para alguna constante $C = C(\delta, p_i)$.Por las consideraciones previas, sabemos que $\omega \leq 1$ por lo cual tenemos

$$\omega^{(\alpha-1)p_i} \geq \omega^\alpha \tag{4.32}$$

ya que

$$\alpha \geq (\alpha - 1)p_i \Longleftrightarrow \alpha \leq \frac{p_i}{p_i - 1} \tag{4.33}$$

por lo tanto

$$\leq \delta \sum_i \int_{\Omega_\epsilon} \frac{|\partial_{x_i} w|^{p_i}}{\omega^\alpha} + C \sum_i \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i}.$$

eligiendo δ tal que $\delta < \mu$, ahora δ es fijo. Obtenemos

$$\int_\Omega \{b(x,u) - b(x,v)\} F_\epsilon(w) \leq C' \sum_i \int_{\Omega_\epsilon} |\partial_{x_i} v|^{p_i} \tag{4.34}$$

para alguna constante C'.

Además $\chi_{\Omega_\epsilon} \longrightarrow 0$ en c.t.p , y $F_\epsilon(w) \longrightarrow 1$ sobre $w > 0$.

tomando el límite en (4.34) obtenemos

$$\int_{u-v>0} \{b(x,u) - b(x,v)\} \leq 0$$

por lo tanto $u - v \leq 0$, si b es monótona creciente en u. Intercambiando el papel de u y v , obtenemos $u = v$ siempre que α se elija tal que $\alpha \leq \dfrac{p_i}{p_i - 1}$, $\forall i$. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

(1) De lo estudiado en el Capítulo 2 se concluye que para probar la existencia de solución débil de la ecuación (2.1) a diferencia de las otras técnicas analizadas , el teorema del punto fijo de Schauder que esta fuertemente relacionada con los resultados sobre operadores compactos nos permite probar que para (2.1) existe solución débil

(2) Las ecuaciones (2.1) y (3.1) estudiados en los Capítulos 2 y 3 modelan diversos fenomenos físicos , por lo cual es importante probar que para tales ecuaciones existe solución. En este trabajo probamos la existencia de solución débil de ambas ecuaciones aplicando el teorema del punto fijo de Schauder.

Bibliografía

[1] Adams,R: *Sobolev Spaces* . Academic Press,Inc. London. 1975.

[2] Badiale,M y Serra,E: *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*.Springer Science & Business Media.2010.

[3] Barrett,J y Liu,W.B :*Finite element approximation of the p-Laplacian*. SIAM journal on Numerical analysis,1993.p 523-524

[4] Blanchard, P y Brüning,E: *Variational methods in mathematical physics*. Springer. 1992.

[5] Boccardo,L y Croce,G:*Esistenza e regularita di soluzioni per alcuni problemi ellittice* Pitagora, pp112-2010.

[6] Brezis, H: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media.2010.

[7] Cavalcanti M.M: *Introduçao a Teoria das distribuiçoes e aos Espaços de Sobolev*. Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá. 2009.

[8] Chipot M: *Elliptic equations: an introductory course*.Springer Science & Business Media.2009.

[9] Chipot M:*Elements of nonlinear analysis*. Birkhäuser.2012.

[10] Choquet, G;*Topología*. Masson, Barcelona. 1971.

[11] Gilbarg,D y Trudinger, N. S: Elliptic partial differential equations of second order. Springer. 2001.

[12] Costa,D : *An invitation to variational methods in differential equations*. Springer Science & Business Media. 2010.

[13] Evans,L.C:*Partial Differential Equations - Graduate Studies in Mathematics vol. 19*.Providence,RI: American Mathematical Society.Oxford University Press.1998.

[14] Guzmán, M , y Rubio, B: *Integración: teoría y técnicas*. Alhambra, Madrid.1979.

[15] Kavian,O: *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*.Spriger-Verlag.Paris.1993.

[16] Kesavan,S: *Topics in functional analysis and applications*. Wiley. 1989.

[17] Kolmogorov,A.N, Fomin,S.V: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, MIR,Moscú . 1978.

[18] Lindqvist,P: *Notes on the p-Laplace equation*,Univ.,2005.

[19] Lions,J-L: *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*.Paris ,Dunod.1969.

[20] Muñoz,J:*Introducao as Distribucoes & Equacoes Diferencias Parciais* . Petropolis,2004.

[21] Royden,P: *Real analysis*,Macmillan New York,1988.

[22] Zeidler,E: *Nonlinear Analysis and Its Applications I: Fixed-Point Theorems*. Springer-Verlag, New York.1993.

[23] Zeidler,E: *Nonlinear Analysis and Its Applications II/B: Nonlinear Monotone Operators*. Springer-Verlag, New York.1990.

[24] Yosida, K: *Functional analysis. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics*. Springer-Verlag. New York/Berlin. 1980.

Papers y Artículos

[25] Antontsev,S. Chipot,M.:*Anisotropic equations: uniqueness and existence results*

[26] Antontsev,S. Chipot,M. and Xie,Y.*Uniqueness results for equations of the p(x)−Laplacian type*, Adv. Math. Sci. Appl., 17 (2007), pp. 287304.

[27] Antontsev, S. and Shmarev,S.:*Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions*, Elsevier, 2006. Handbook of Differential Equations. Stationary Partial Differential Equations,Else vier, Vol. 3, Chapter 1, pp. 1-100

[28] I. Fragala,F. Gazzola,B. Kawohl: *existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear ellipti equations*. Ann.I.H.Poincaré-AN 21 (2004) 715-734.

[29] Orsina,L: *Elliptic equations* .

[30] Orsina,L: *Elliptic equations with measure data* (2009).

[31] Porzio,M.M. :*A uniqueness result for monotone elliptic problems*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris 337(2003),313-316.

[32] Prignet,A : *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*, Rend. Mat.,15 (1995),321-337